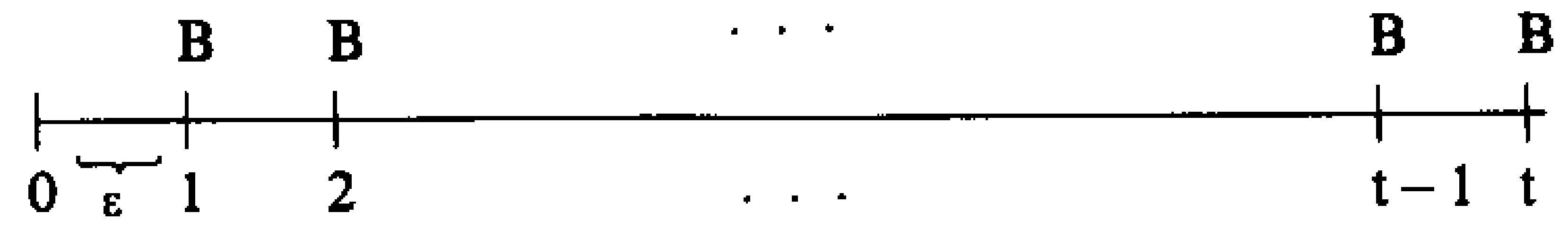
# Χρηματοοικονομική Διοίκηση στην Υγεία Ράντες

Ιορδάνης Ελευθεριάδης

# PANTA

Ο όρος ράντα αναφέρεται σε μια ακολουθία χρηματικών ποσών που τοποθετούνται σε ίσες απέχουσες μεταξύ τους χρονικές στιγμές (π.χ. μηνιαίοι μισθοί, ενοίκια, δόσεις δανείων, ασφάλιστρα κ.λ.π.). Το ποσό κάθε χρηματικής καταβολής ονομάζεται όρος της ράντας και η περίοδος μεταξύ δύο διαδοχικών καταβολών ονομάζεται περίοδος πληρωμής.



# Ράντες - Ορισμοί

- Η περίοδος μεταξύ δύο διαδοχικών μεταβολών ονομάζεται περίοδος πληρωμής
- Όταν η περίοδος πληρωμής ισούται με την περίοδο κεφαλαιοποίησης του τόκου, τότε η ράντα λέγεται ακέραιη
- Η ράντα λέγεται κλασματική, όταν η περίοδος πληρωμής είναι μικρότερη από την περίοδο κεφαλαιοποίησης του τόκου, δηλ. όταν γίνονται ρ πληρωμές σε διαδοχικά διαστήματα (1/r) της περιόδου κεφαλαιοποίησης του τόκου.

# Ράντες - Ορισμοί

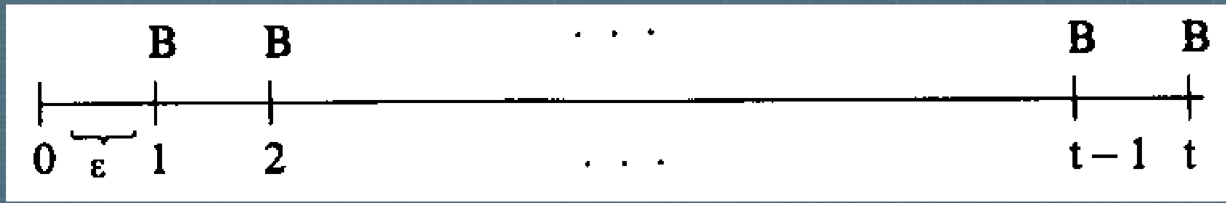
- Αν $t<\infty$ η ράντα ονομάζεται πρόσκαιρη
- Αν $t= \infty$ η ράντα ονομάζεται διηνεκής
- Όταν είναι βέβαιο ότι οι καταβολές θα συνεχιστούν για $t$ περιόδους, η ράντα λέγεται βέβαιη
- Αν η συνέχιση των καταβολών εξαρτάται από την εμφάνιση κάποιου τυχαίου γεγονότος, η ράντα λέγεται τυχαία.

# Ράντες - Ορισμοί

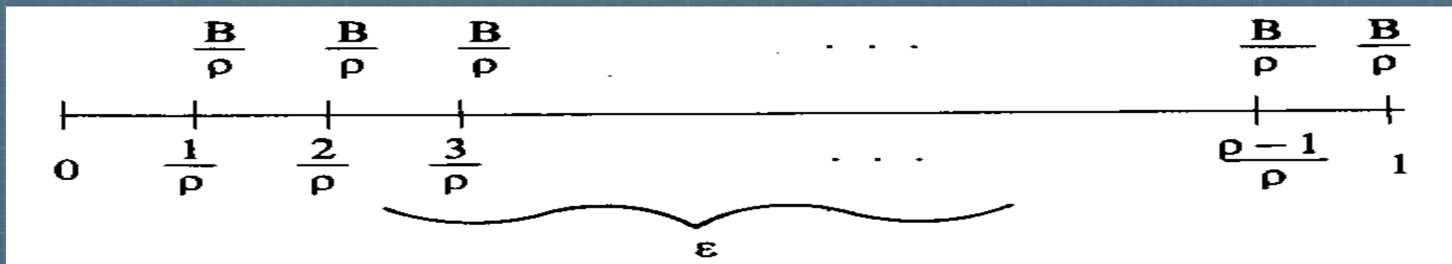
- Η ράντα ονομάζεται ληξιπρόθεσμη όταν οι όροι πληρώνονται στο τέλος κάθε περιόδου ανατοκισμού
- Η ράντα ονομάζεται προκαταβλητέα όταν οι όροι πληρώνονται στην αρχή κάθε περιόδου ανατοκισμού
- Άμεσες είναι οι ράντες που ο χρόνος υπολογισμού τους συμπίπτει με την αρχή τους, αρξάμενες όταν ο χρόνος υπολογισμού είναι μεταγενέστερος της αρχής και μελλοντικές όταν είναι προγενέστερος

# Άμεσες ληξιπρόθεσμες ράντες

Ο άξονας του χρόνου για μια άμεση ακέραια ληξιπρόθεσμη ράντα t σταθερών όρων B, μπορεί να εμφανισθεί ως εξής:

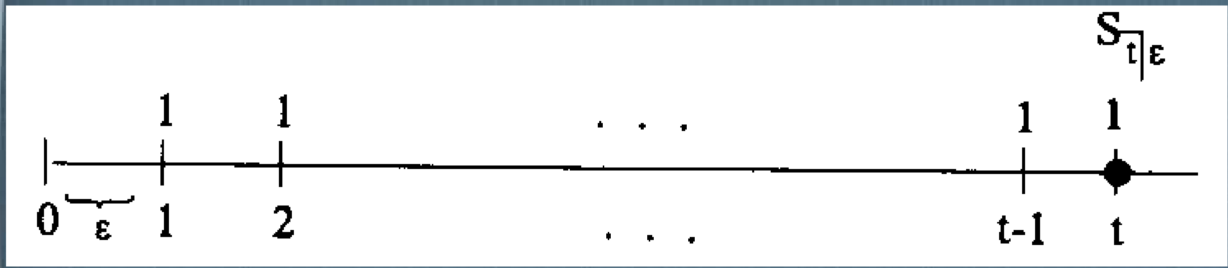



Αν η ράντα είναι κλασματική, τότε μέσα σε κάθε περίοδο κεφαλαιοποίησης του τόκου γίνονται ρ καταβολές κατά χρονικά διαστήματα 1/ρ της περιόδου. Ο άξονας του χρόνου με αναφορά στην πρώτη περίοδο κεφαλαιοποίησης του τόκου έχει την εξής μορφή:



# Τελική αξία ακέραιης ράντας

Αν εξετάσουμε μια μοναδιαία ράντα, όπου B=1, η τελική αξία στον άξονα του χρόνου εμφανίζεται ως εξής και θα ισούται με:




$$S_{t\neg\varepsilon} = \frac{(1+\varepsilon)^t - 1}{\varepsilon}$$

Αν ο όρος της ράντας, είναι B€, η τελική αξία της ισούται με:

$$(TA) = BS_{t\neg\varepsilon} = B\frac{(1+\varepsilon)^t - 1}{\varepsilon}$$

# Τελική αξία ακέραιης ράντας Παράδειγμα

- Ζητείται να προσδιοριστεί η (ΤΑ) μιας ετήσιας ληξιπρόθεσμης ράντας 10.000 ευρώ για 6 έτη, όταν το επιτόκιο είναι 6%.

$$(TA)=B\frac{(1+\varepsilon)^{t}-1}{\varepsilon}=BS_{\overline{t}|\varepsilon}$$

$$(TA)=BS_{\overline{t}|\varepsilon}=10.000\frac{(1+0{,}06)^{t}-1}{0{,}06}$$

Από τους πίνακες Α λαμβάνουμε $S_{\overline{6}|0,06}=6{,}975$ Επομένως,

$$(TA) = 10.000(6{,}975) = 69.750 \text{ ευρώ}$$

# Τελική αξία ακέραιης ράντας Παράδειγμα

Ο Δημητρίου καταθέτει 5.000 ευρώ στην τράπεζα στο τέλος κάθε μηνός και για 4 έτη, προς ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο $\varepsilon_{12} = 0,06$. Ζητείται να προσδιοριστεί το τελικό χρηματικό ποσό, το οποίο μπορεί να αναληφθεί μετά 6 έτη, αν ο Δημητρίου δεν συνεχίσει τις μηνιαίες καταθέσεις του μετά από τα 4 έτη.

Η βασική περίοδος κεφαλαιοποίησης του τόκου είναι ο μήνας. Ο Δημητρίου προβαίνει σε $t = 4x12 = 48$ μηνιαίες καταθέσεις προς μηνιαίο επιτόκιο $\frac{\varepsilon_{12}}{12} = \frac{0,06}{12} = 0,005$ ή 0,5%. Επομένως η (ΤΑ) της μηνιαίας ράντας των 48 όρων προς επιτόκιο 0,005, στο χρόνο της τελευταίας κατάθεσης, ισούται με

$$(TA) = BS_{\overline{t}|\varepsilon} = 5.000\,\frac{(1+0,005)^{48}-1}{0,005} = 270.489,16\ €$$

Για να προσδιορίσουμε την τελική αξία του ποσού αυτού στο τέλος των 6 ετών, θα πρέπει να την ανατοκίσουμε για (6 — 4)12 = 24 μήνες προς μηνιαίο επιτόκιο 0,005. Επομένως,

$$270.489,16\,(1,005)^{24} = 304.884,50\ €$$

# Τελική αξία ακέραιης ράντας Παράδειγμα

Μια ληξιπρόθεσμη ράντα έχει 10 όρους των 35.000 ευρώ, που καταβάλλονται ανά έτος με ονομαστικό επιτόκιο $\varepsilon_2$ = 0,08. Ζητείται να υπολογιστεί η τελική της αξία, όταν ο ανατοκισμός όπως φαίνεται από το ονομαστικό επιτόκιο γίνεται ανά εξάμηνο.

.

$$(1+\varepsilon) = \left(1+\frac{\varepsilon_\rho}{\rho}\right)^\rho$$

$$(1+\varepsilon) = \left(1+\frac{0{,}08}{2}\right)^2 = 1{,}0816$$

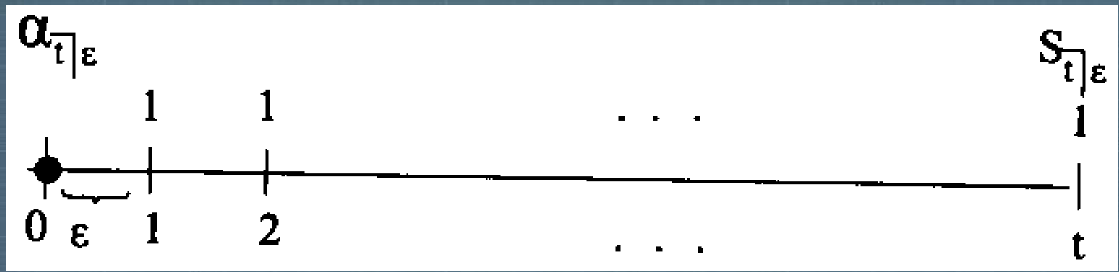
και $\varepsilon = 1{,}0816 - 1 = 0{,}0816$

$$(TA) = B\frac{(1+\varepsilon)^t - 1}{\varepsilon} = BS_{\overline{t}|\varepsilon}$$

$$(TA) = BS_{\overline{t}|\varepsilon} = 35.000\frac{(1+0{,}0816)^{10} - 1}{0{,}0816} = 510.989{,}41$$

# Παρούσα αξία ακέραιης ράντας

Αν εξετάσουμε μια μοναδιαία ράντα, όπου Β=1, η παρούσα αξία στον άξονα του χρόνου εμφανίζεται ως εξής και θα ισούται με:




$$\alpha_{t\neg\varepsilon} = \frac{1-(1+\varepsilon)^{-t}}{\varepsilon}$$

Αν ο όρος της ράντας, είναι Β€, η παρούσα αξία της ισούται με:

$$(\Pi A) = B\alpha_{t\neg\varepsilon} = B\frac{1-(1+\varepsilon)^{-t}}{\varepsilon}$$

# Παρούσα αξία ακέραιης ράντας Παράδειγμα

Μία ράντα έχει 15 όρους των 20.000 ευρώ, που καταβάλλονται στο τέλος κάθε έτους με επιτόκιο ε = 0,07. Ζητείται να προσδιοριστεί η παρούσα αξία της ράντας.

$$(\Pi A) = B\alpha_{t\neg\varepsilon} = B\frac{1-(1+\varepsilon)^{-t}}{\varepsilon}$$

Δεδομένου ότι, Β = 20.000, t = 15 και ε = 0,07 αναφέρονται σε ετήσια περίοδο, αντικαθιστούμε τις τιμές αυτές στην εξίσωση και έχουμε:

$$(\Pi A) = 20.000\alpha_{\bar{t}|\varepsilon} = 20.000\frac{1-(1+0,07)^{-15}}{0,07}$$

Από τον αντίστοιχο πίνακα Α λαμβάνουμε,

$$\alpha_{\bar{t}|\varepsilon} = \frac{1-(1+0,07)^{-15}}{0,07} = 9,108$$

Επομένως,

$$(\Pi A) = 20.000\ (9,108) = = 182.158,28 \text{ ευρώ}$$

# Παρούσα αξία ακέραιης ράντας Παράδειγμα

Ο Ζιώγας θα καταβάλλει στο τέλος κάθε έτους και επί 10 έτη, 100.000 ευρώ, προς ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο $\varepsilon_2 = 0{,}09$, για να εξοφλήσει ένα δάνειο που συνήψε σήμερα. Ζητείται να προσδιοριστεί το ύψος του δανείου.

$$(\Pi A) = B\alpha_{t\neg\varepsilon} = B\frac{1-(1+\varepsilon)^{-t}}{\varepsilon}$$

Δεδομένου ότι Β = 100.000 και t = 10 αναφέρονται σε ετήσια περίοδο, ενώ το επιτόκιο = 0,09 αναφέρεται σε εξαμηνιαία περίοδο κεφαλαιοποίησης του τόκου, πρέπει να υπολογίσουμε πρώτα το ετήσιο πραγματικό επιτόκιο που είναι ισοδύναμο του ετήσιου ονομαστικού $\varepsilon_2$ = 0,09. :

$$\varepsilon = \left(1 + \frac{\varepsilon_2}{2}\right)^2 - 1 = 1{,}045^2 - 1 = 0{,}092025$$

Επομένως, το ύψος του δανείου που ισούται με την (ΠΑ) της ράντας είναι,

$$(\Pi A) = 100.000\alpha_{\overline{t}|\varepsilon} = 100.000\frac{1-(1+0{,}092025)^{-10}}{0{,}092025}$$

$$(\Pi A) = 100.000\frac{1-0{,}41464}{0{,}092025} = 636084{,}91€$$

# Παρούσα αξία ράντας Παράδειγμα

Ένα σύστημα home cinema μπορεί να αγοραστεί είτε «τοις μετρητοίς» είτε καταβάλλοντας μια προκαταβολή 500 ευρώ και 15 μηνιαίες δόσεις των 300 ευρώ. Ζητείται να προσδιοριστεί η μέγιστη τιμή μετρητοίς, που ο αγοραστής θα ήταν διατεθειμένος να καταβάλει, όταν το ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο είναι $\varepsilon_{12} = 0{,}24$.

.

$$(\Pi A) = B\alpha_{t\neg\varepsilon} = B\frac{1-(1+\varepsilon)^{-t}}{\varepsilon}$$

Η τιμή μετρητοίς την οποία κατά μέγιστο θα ήταν διατεθειμένος να καταβάλει ο αγοραστής ισούται με την παρούσα αξία της ράντας των 15 μηνιαίων δόσεων των 300 ευρώ προς μηνιαίο επιτόκιο ε12/12 = 0,24/12 = 0,02, προσαυξημένη κατά το ποσό της προκαταβολής. Επομένως, :

$$(\Pi A)=300\frac{1-(1+0{,}02)^{-15}}{0{,}02}+500$$

$$(\Pi A) = 4354{,}78 \text{ ευρώ}$$

# Παρούσα αξία ράντας - Παράδειγμα

Η επιχείρηση Α εξετάζει την αγορά ή την ενοικίαση ενός γραφείου στη Θεσσαλονίκη. Η χρονική περίοδος της χρησιμοποίησης του γραφείου είναι 5 έτη. Η τιμή αγοράς του γραφείου είναι 150.000 ευρώ. Η επιχείρηση ελπίζει ότι στο τέλος των 5 ετών, η τιμή πώλησης του γραφείου θα είναι 100.000 ευρώ. Εναλλακτικά, η επιχείρηση μπορεί να ενοικιάσει το γραφείο με πενταετές συμβόλαιο και με μηνιαίο ενοίκιο 2.000 ευρώ. Ζητείται να προσδιοριστεί κατά πόσο συμφέρει η αγορά ή η ενοικίαση του γραφείου, όταν το επιτόκιο είναι $\varepsilon_2 = 0,08$.

(i) Για την αγορά του γραφείου

$$(\Pi A)_1 = 150.000 - 100.000\,(1+0,04)^{-10} = 150.000 - 67.556,42 = 82.443,58 \text{ ευρώ}$$

(ii) Για την ενοικίαση του γραφείου

Αρχικά θα υπολογίσουμε το μηνιαίο επιτόκιο από την σχέση:

$$\left(1+\frac{\varepsilon_2}{2}\right)^2 = \left(1+\frac{\varepsilon_{12}}{12}\right)^{12}$$

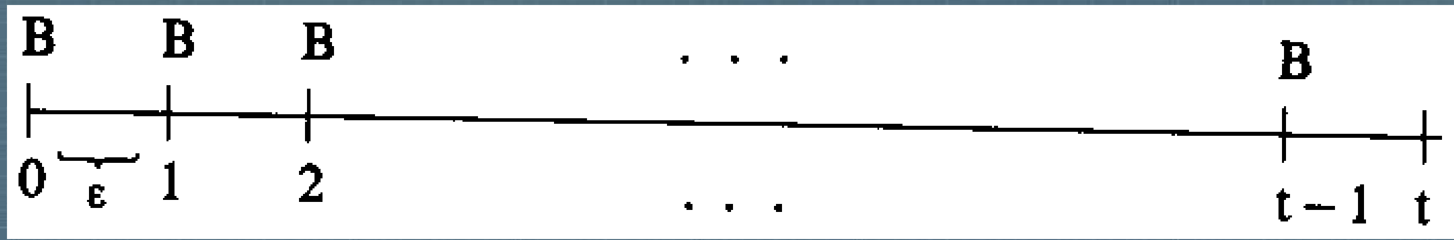
Επομένως,

$$\frac{\varepsilon_{12}}{12} = \left(1+\frac{\varepsilon_2}{2}\right)^{1/6} - 1 = \left(1+\frac{0,08}{2}\right)^{1/6} - 1 = 0,00656$$

$$(\Pi A)_2 = 2.000\,\frac{1-(1+0,00656)^{-60}}{0,00656} = 98.940,56\ €$$

# Άμεσες προκαταβλητέες ράντες

Στις προκαταβλητέες ράντες οι όροι αναφέρονται στην αρχή των περιόδων καταβολής. Στον άξονα των χρόνων απεικονίζονται ως εξής:



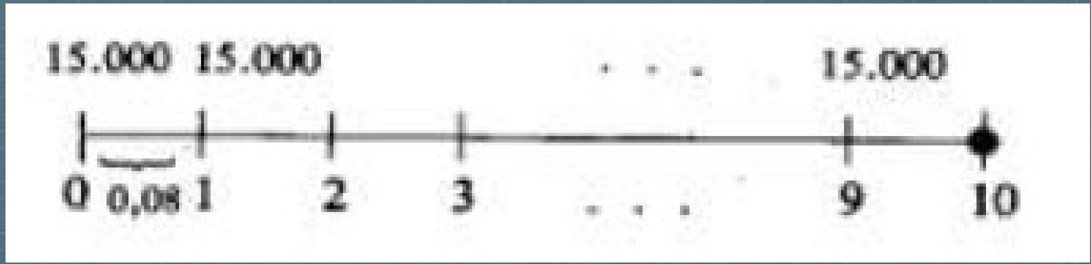

$$(\mathrm{TA})' = BS'_{t\neg\varepsilon} = B(1+\varepsilon)\frac{(1+\varepsilon)^{t}-1}{\varepsilon}$$

Μια προκαταβλητέα ράντα t όρων B είναι ισοδύναμη με μια ισοδύναμη ληξιπρόθεσμη ράντα t όρων B(1+ε) ή

Η τελική αξία μιας προκαταβλητέας ράντας t όρων B ισούται με την τελική αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας t όρων B συν τον σύνθετο τόκο του πρώτου όρου για t περιόδους

# Άμεσες προκαταβλητέες ράντες - Παράδειγμα

- Ζητείται να προσδιοριστεί η τελική αξία μιας ράντας με όρους 15.000 ευρώ, που καταβάλλονται στην αρχή κάθε εξαμήνου για 5 έτη, όταν το επιτόκιο είναι $\varepsilon_2 = 0{,}08$.




$$(\mathrm{TA})' = BS'_{t\neg\varepsilon} = B(1+\varepsilon)\frac{(1+\varepsilon)^t - 1}{\varepsilon}$$

$$(\mathrm{TA})' = 15.000(1+0{,}04)\frac{(1+0{,}04)^{10}-1}{0{,}04} = 187.295{,}27\ €$$

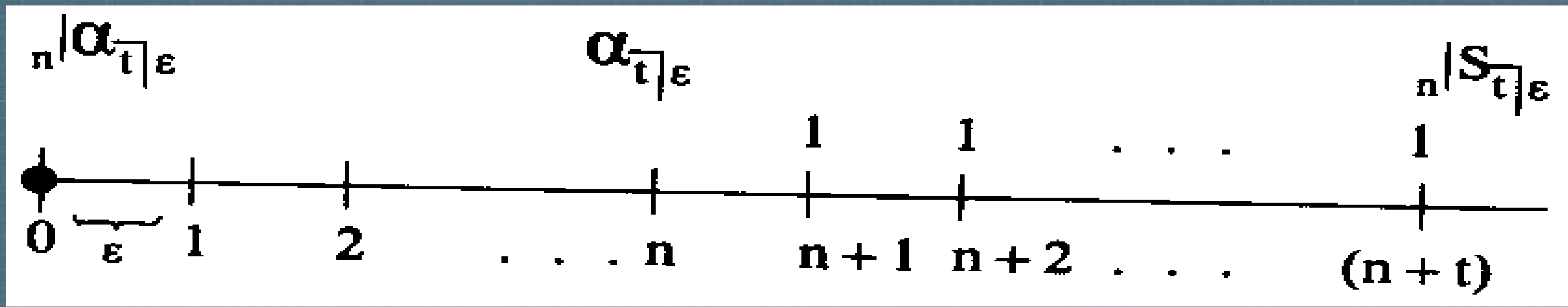
# Παρούσα αξία προκαταβλητέας ράντας

Στις ακέραιες προκαταβλητέες ράντες η διαφορά σε σχέση με την αντίστοιχη ληξιπρόθεσμη είναι ότι όλοι οι όροι καταβάλλονται μια περίοδο πριν:

$$(\Pi\mathrm{A})' = B\alpha'_{t\neg\varepsilon} = B(1+\varepsilon)\alpha_{t\neg\varepsilon} = B(1+\varepsilon)\frac{1-(1+\varepsilon)^{-t}}{\varepsilon}$$

# Μελλοντικές n περιόδων πρόσκαιρες ράντες

Μια μελλοντική n περιόδων ληξιπρόθεσμη ράντα αρχίζει με την εκπνοή των n περιόδων και η πρώτη καταβολή γίνεται στο τέλος της n+1 περιόδου, όπως απεικονίζεται στον άξονα του χρόνου:

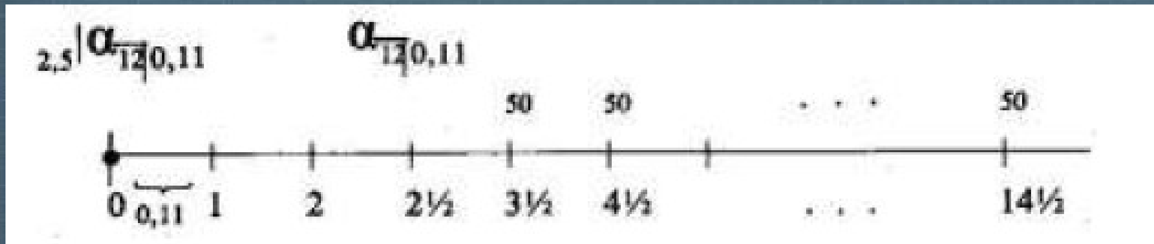



Η αξία της στο χρόνο μηδέν θα είναι:

$$_{n}|\,\alpha_{t\neg\varepsilon} = (1+\varepsilon)^{-n}\alpha_{t\neg\varepsilon}$$

# Μελλοντικές n περιόδων πρόσκαιρες ράντες - Παράδειγμα

Μια ράντα αποτελείται από 12 όρους των 50.000 ευρώ που καταβάλλονται ανά έτος με ετήσιο επιτόκιο ε = 0,11. Η καταβολή του πρώτου όρου θα γίνει μετά από 3,5 έτη. Ζητείται να προσδιοριστεί η παρούσα αξία της ράντας αυτής.




$$_{n}|\alpha_{t\neg\varepsilon} = (1+\varepsilon)^{-n}\alpha_{t\neg\varepsilon}$$

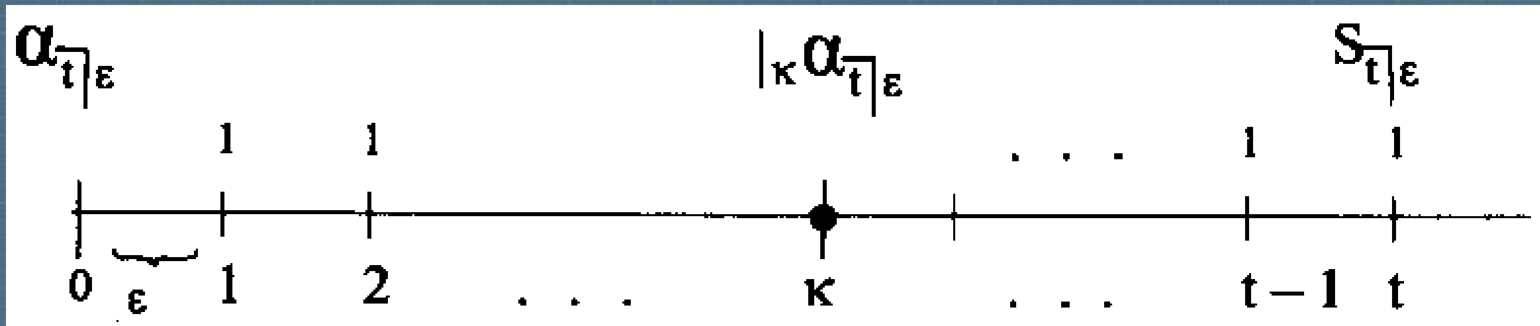
Η εξεταζόμενη ράντα είναι μελλοντική 2,5 ετών, ετήσια ληξιπρόθεσμη 12 όρων. Επομένως, η παρούσα αξία της ράντας αυτής στο χρόνο 0 (ημερομηνία αξιολόγησης), ισούται με

$$_{2,5}|(\Pi A)=B_{2,5}|\alpha_{\overline{12|}\,0,11}=B(1,11\ \varepsilon)^{-2,5}\alpha_{\overline{12|}\,0,11}$$

$$=50.000(1,11)^{-2,5}\frac{1-(1,11)^{-12}}{0,11}=250.072\ €$$

# Αρξάμενες η περιόδων πρόσκαιρες ράντες

Η αξία μιας αρξάμενης ράντας προσδιορίζεται κ περιόδους μετά την έναρξή της. Ο άξονας του εμφανίζει μια αρξάμενη κ περιόδων ληξιπρόθεσμη μοναδιαία ράντα:




Η αξία της στο τέλος της κ περιόδου θα είναι:

$$|_\kappa \alpha_{t\neg\varepsilon} = (1+\varepsilon)^\kappa \alpha_{t\neg\varepsilon}$$

# Αρξάμενες n περιόδων πρόσκαιρες ράντες - Παράδειγμα

Ζητείται να προσδιοριστεί η αξία μιας ράντας 15 όρων των 50.000 ευρώ καταβαλλόμενων στο τέλος κάθε έτους, προς ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο $\varepsilon_2$ = 0,10, 11 έτη μετά από την έναρξη της.

$$|_{\kappa}\, \alpha_{\overline{t}|\varepsilon} = (1+\varepsilon)^{\kappa}\, \alpha_{\overline{t}|\varepsilon}$$

Το ετήσιο ισοδύναμο πραγματικό επιτόκιο είναι $\varepsilon = (1 + 0,10/2)^2 - 1 = 0,1025$. Επομένως, εφαρμόζοντας την εξίσωση (2.18), έχουμε

$$|_{\kappa}(\Pi A) = 50.000\alpha_{\overline{15}|0,1025}(1 + 0,1025)^{11}$$

$$= 50.000\frac{1-1,1025^{-15}}{0,1025}(1 + 0,1025)^{11} = 1.096.791 \text{ ευρώ}$$

# Ράντες σταθερές διηνεκείς

- Μια ράντα λέγεται διηνεκής όταν το πλήθος των όρων της είναι άπειρο, δηλ., t=∞.
- Στις διηνεκείς ράντες δεν έχει νόημα η εξέταση της τελικής τους αξίας, γιατί η αξία αυτή τείνει στο άπειρο.
- Αντίθετα η έννοια της παρούσας αξίας μιας διηνεκούς ράντας έχει πολλές πρακτικές εφαρμογές σε προβλήματα χρηματοοικονομικής διοίκησης

# Υπολογισμός ΠΑ διηνεκούς ράντας

- Άμεση ακέραια ληξιπρόθεσμη $\rightarrow$ $$(\text{ΠΑ}) = \frac{\text{Β}}{\varepsilon}$$
- Άμεση κλασματική ληξιπρόθεσμη $\rightarrow$ $$(\Pi A) = \frac{B}{\varepsilon_{\rho}}$$
- Άμεση ακέραια προκαταβλητέα $\rightarrow$ $$(\Pi A) = B\frac{(1+\varepsilon)}{\varepsilon}$$
- Άμεση κλασματική προκαταβλητέα $\rightarrow$ $$(\Pi A) = \frac{(1+\varepsilon)^{1/\rho}}{\varepsilon_{\rho}}$$
- Μελλοντική n περιόδων $\rightarrow$ $${}_{n}|(\Pi A) = B\frac{(1+\varepsilon)^{-n}}{\varepsilon}$$
- Αρξάμενη κ περιόδων $\rightarrow$ $$|_{\kappa}(\Pi A) = B\frac{(1+\varepsilon)^{\kappa}}{\varepsilon}$$

# Ράντες σταθερές διηνεκείς - Παράδειγμα

Ένας απόφοιτος του Πανεπιστημίου Μακεδονίας, αποφάσισε τη χορήγηση μιας ετήσιας υποτροφίας 8.000 ευρώ από το επόμενο έτος και στο διηνεκές και επιθυμεί να γνωρίσει το ποσό που πρέπει να καταθέσει σήμερα στην τράπεζα για τον σκοπό αυτό, όταν το ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο είναι $\varepsilon_2 = 0{,}10$. Να προσδιοριστεί το αρχικό κεφάλαιο που πρέπει να κατατεθεί στην τράπεζα για τη χορήγηση μιας ετήσιας υποτροφίας 8.000 ευρώ, με έναρξη της από σήμερα. Αν η πρώτη ετήσια υποτροφία των 8.000 ευρώ χορηγηθεί μετά από 3,5 έτη από σήμερα και στο διηνεκές, ποιο είναι το ποσό που πρέπει να καταθέσει σήμερα;

$$\varepsilon = (1 + 0{,}10/2)^2 - 1 = 0{,}1025$$

$$(\Pi A) = 8.000/0{,}1025 = 78.048{,}78 \text{ ευρώ}$$

$$(\Pi A)' = 8.000\ (1{,}1025/0{,}1025) = 86048{,}78\ €$$

$$_{2,5|}(\Pi A) = 8.000 \frac{(1 + 0{,}1025)^{-2,5}}{01025} = 61153{,}26\ €$$

# Προσδιορισμός όρου ράντας με γνωστή την τελική αξία

Αν λύσουμε την εξίσωση της τελικής αξίας της ράντας ως προς την δόση προκύπτει ο τύπος που προσδιορίζει τον όρο της ράντας:

$$(\mathrm{TA}) = A S_{t\neg\varepsilon} \Rightarrow A = \frac{(TA)}{S_{t\neg\varepsilon}} = (TA) S^{-1}_{t\neg\varepsilon}$$

Θέτοντας (ΤΑ)=1 έχουμε τον όρο μιας ράντας με τελική αξία στο χρόνο της τελευταίας πληρωμής ίση με 1€. Ο όρος αυτός ισούται με:

$$S^{-1}_{t\neg\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)^t - 1}$$

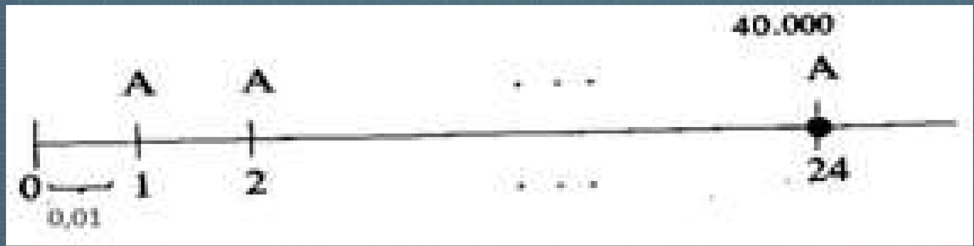
# Αποθεματικό κεφάλαιο χρεολυσίας

- Ένα κεφάλαιο που δημιουργείται από χρηματικές καταβολές που γίνονται σε ίσες απέχουσες μεταξύ τους χρονικές στιγμές είναι γνωστό ως αποθεματικό κεφαλαίο χρεολυσίας
- Το επιτόκιο με το οποίο το αποθεματικό κεφάλαιο ανατοκίζεται λέγεται επιτόκιο αποθεματικού κεφαλαίου χρεολυσίας και η χρηματική καταβολή που γίνεται στο αποθεματικό κεφάλαιο λέγεται χρεολύσιο.

# Προσδιορισμός όρου ράντας με γνωστή την τελική αξία - Παράδειγμα

Ένα άτομο επιθυμεί να δημιουργήσει ένα αποθεματικό κεφάλαιο χρεολυσίας 40.000 ευρώ για να αγοράσει ένα αυτοκίνητο Ι.Χ. στο τέλος των 2 ετών. Ζητείται να προσδιοριστεί το χρηματικό ποσό που πρέπει να καταθέτει στην τράπεζα στο τέλος κάθε μηνός για να σχηματισθεί το αποθεματικό αυτό κεφάλαιο, όταν το ετήσιο επιτόκιο είναι (α) $\varepsilon_{12} = 0{,}12$, (β) $\varepsilon = 0{,}10$.

$$(\mathrm{TA}) = A S_{t|\varepsilon} \Rightarrow A = \frac{(TA)}{S_{t|\varepsilon}} = (TA) S^{-1}_{t|\varepsilon}$$




$$S^{-1}_{t|\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)^t - 1}$$

$$A = (TA)\, S^{-1}_{t|\varepsilon} = 40.000 S^{-1}_{24|0,01} = 40.000 \frac{0{,}01}{(1+0{,}01)^{24} - 1} = 1483{,}89 \text{ €}$$

$$\varepsilon_{12} = 12(1{,}10^{1/12} - 1) = 0{,}09569 \quad \text{και} \quad \varepsilon_{12}/12 = 0{,}00797$$

$$A = (TA)\, S^{-1}_{t|\varepsilon} = 40.000 S^{-1}_{24|0,00797} = 40.000 \frac{0{,}00797}{(1+0{,}00797)^{24} - 1} = 1518{,}9 \text{ €}$$

# Αποθεματικό κεφάλαιο χρεολυσίας

Ζητείται να προσδιοριστεί το χρεολύσιο Α που κατατίθεται στο τέλος κάθε εξαμήνου και σχηματίζει ένα αποθεματικό κεφάλαιο χρεολυσίας στο τέλος των δύο ετών, 4.000.000 ευρώ προς επιτόκιο $ε_2 = 0{,}06$.

$$A = 4.000.000 \frac{0{,}03}{(1+0{,}03)^4 - 1} = 956.108{,}18\ €$$

Σχηματισμός Αποθεματικού Κεφαλαίου Χρεολυσίας (ευρώ)

| Περίοδος (εξάμηνα) | Εξαμηνιαίο χρεολύσιο | Τόκος επί του αποθεματικού χρεολυσίας | Αύξηση του αποθεματικού χρεολυσίας | Αποθεματικό χρεολυσίας στο τέλος της περιόδου |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 956.108 | | 956.108 | 956.108 |
| 2 | 956.108 | 28.683 | 984.791 | 1.940.900 |
| 3 | 956.108 | 58.227 | 1.014.335 | 2.955.235 |
| 4 | 956.108 | 88.657 | 1.044.765 | 4.000.000 |

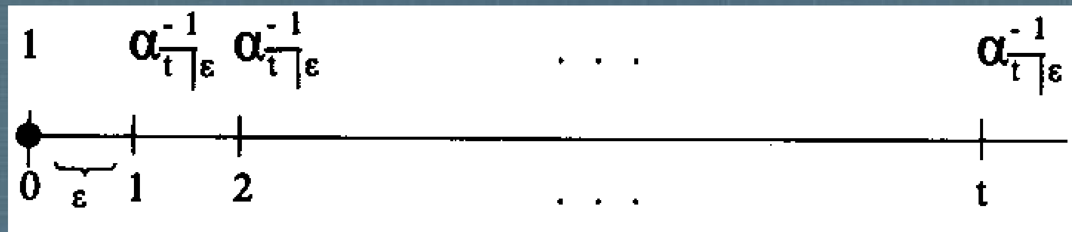
# Προσδιορισμός όρου ράντας με γνωστή παρούσα αξία

Αν λύσουμε την εξίσωση της παρούσας αξίας της ράντας ως προς τον όρο προκύπτει ο τύπος που προσδιορίζει τον όρο της ράντας:

$$(\Pi A) = B\,\alpha_{t\neg\varepsilon} \Rightarrow B = \frac{(\Pi A)}{\alpha_{t\neg\varepsilon}} = (\Pi A)\,\alpha^{-1}_{t\neg\varepsilon}$$

Θέτοντας (ΠΑ)=1 έχουμε τον όρο μιας ράντας με παρούσα αξία στο χρόνο έναρξής της πληρωμής ίση με 1€. Ο όρος αυτός ισούται με:

$$\alpha^{-1}_{t\neg\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{1-(1+\varepsilon)^{-t}}$$



# Προσδιορισμός όρου ράντας με γνωστή παρούσα αξία - Παράδειγμα

Δάνειο ύψους 5.000.000 ευρώ, που συνάπτεται σήμερα, θα εξοφληθεί σε 3 έτη με ίσες μηνιαίες τοκοχρεολυτικές δόσεις. Ζητείται να προσδιοριστεί η μηνιαία τοκοχρεολυτική δόση, όταν το ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο είναι $\varepsilon_{12} = 0{,}06$.

Εφόσον η περίοδος πληρωμής είναι ίση με την περίοδο κεφαλαιοποίησης του τόκου, το πρόβλημα μπορεί να λυθεί με απευθείας εφαρμογή της εξίσωσης

$$B = (\Pi A)\alpha^{-1}_{t|\varepsilon} = (\Pi A)\frac{\varepsilon}{1-(1+\varepsilon)^{-t}}$$

Πράγματι, για (ΠΑ) = 5.000.000 ευρώ, $t = 3x12 = 36$ μήνες και $\varepsilon_{12}\ /12 = 0{,}005$ μηνιαίο επιτόκιο, έχουμε

$$B = (\Pi A)\alpha^{-1}_{t|\varepsilon} = (\Pi A)\frac{\varepsilon}{1-(1+\varepsilon)^{-t}} = 5.000.000\frac{0{,}005}{1-(1+0{,}005)^{-36}} = 152.109{,}69\ €$$

# Προσδιορισμός όρου ράντας με γνωστή παρούσα αξία - Παράδειγμα

Ζητείται να προσδιοριστεί το τοκοχρεολύσιο που πρέπει να καταβάλλεται στο τέλος κάθε εξαμήνου και επί δύο έτη προς ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο $\varepsilon_2 = 0{,}06$, προκειμένου να εξοφληθεί δάνειο ύψους 4.000.000 ευρώ που συνάπτεται σήμερα.

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.32) για τιμές (ΠΑ) = 4.000.000 ευρώ, t = 2x2 = 4 εξάμηνα, και $\varepsilon_2/2 = 0{,}06/2 = 0{,}03$ εξαμηνιαίο επιτόκιο, έχουμε

$$B = (\Pi A)\alpha^{-1}_{\overline{t|}\varepsilon} = (\Pi A)\frac{\varepsilon}{1-(1+\varepsilon)^{-t}} = 4.000.000\frac{0{,}03}{1-(1+0{,}03)^{-4}} = 1.076.108{,}18\ €$$

Τοκοχρεολυτική Εξυπηρέτηση και Εξόφληση Δανείου

| Περίοδος (εξάμηνα) | Ανεξόφλητο δάνειο στην αρχή της επόμενης περιόδου | Τοκοχρεολύσιο | Τόκοι | Εξόφληση δανείου |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 4.000.000 | — | — | — |
| 1 | 3.043.892 | 1.076.108 | 120.000 | 956.108 |
| 2 | 2.059.100 | 1.076.108 | 91.317 | 984.791 |
| 3 | 1.044.765 | 1.076.108 | 61.773 | 1.014.335 |
| 4 | 0 | 1.076.108 | 31.343 | 1.044.765 |

# Προσδιορισμός του αριθμού των όρων μιας ράντας

Η αγορά καταναλωτικών αγαθών με την καταβολή μιας προκαταβολής κατά τον χρόνο αγοράς και στη συνέχεια πραγματοποίηση μιας σειράς από περιοδικές πληρωμές είναι μια συνηθισμένη πρακτική. Ο προσδιορισμός του αριθμού των περιοδικών πληρωμών μπορεί να γίνει ως εξής:

Υπολογίζουμε την ΠΑ της μοναδιαίας ράντας t όρων προς επιτόκιο ε ανά περίοδο από τη σχέση:

$$\alpha_{t\neg\varepsilon} = \frac{(\Pi \mathrm{A})}{B}$$

Για να υπολογίσουμε την τιμή του t, ανατρέχουμε στους πίνακες όπου βρίσκουμε τις τιμές:

$$\alpha_{n\neg\varepsilon} < \alpha_{t\neg\varepsilon} < \alpha_{n+1\neg\varepsilon}$$

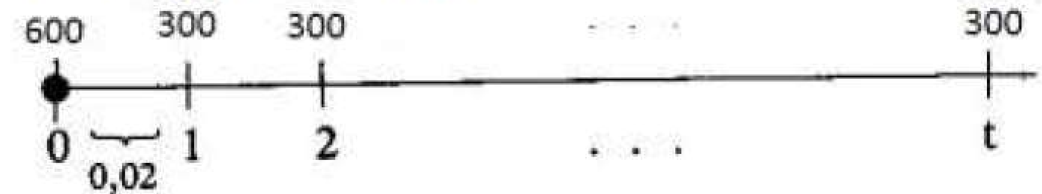
Επομένως θα πρέπει να γίνουν n πληρωμές Β€ στο τέλος κάθε περιόδου συν μια μερική πληρωμή Μ στο τέλος της n+1 περιόδου:

$$M = K(1+\varepsilon)^{n+1} - B\left(S_{n+1\neg\varepsilon} - 1\right)$$

# Προσδιορισμός όρου ράντας με γνωστή παρούσα αξία - Παράδειγμα

Ένα ιατρικό μηχάνημα αξίας 3.000 ευρώ μπορεί να αγοραστεί, δίνοντας μια προκαταβολή 600 ευρώ και στη συνέχεια μια σειρά μηνιαίων πληρωμών 300 ευρώ. Ζητείται να προσδιοριστεί ο αριθμός των μηνιαίων πληρωμών και η τελευταία πληρωμή που θα απαιτηθεί για την εξόφληση του χρέους, όταν το ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο είναι $\varepsilon_{12} = 0{,}24$.

Εφόσον πληρώθηκε προκαταβολή 600 € το υπόλοιπο ποσό που θα εξοφληθεί με την καταβολή των δόσεων των 300 € είναι 2.400 €. Τα δεδομένα του προβλήματος εμφανίζονται στον εξής άξονα του χρόνου.




| | 1% | 2% |
|---|---|---|
| 1 | 0,9901 € | 0,9804 € |
| 2 | 1,9704 € | 1,9416 € |
| 3 | 2,9410 € | 2,8839 € |
| 4 | 3,9020 € | 3,8077 € |
| 5 | 4,8534 € | 4,7135 € |
| 6 | 5,7955 € | 5,6014 € |
| 7 | 6,7282 € | 6,4720 € |
| 8 | 7,6517 € | 7,3255 € |
| 9 | 8,5660 € | 8,1622 € |

$$\alpha_{\overline{t}|0,02} = \frac{2.400}{300} = 8$$

Από τους πίνακες Α, λαμβάνουμε $\alpha_{\overline{8}|0,02} = 7{,}32548 < 8 < \alpha_{\overline{9}|0,02}$

Για να προσδιορίσουμε την πληρωμή Μ, επιλέγουμε ως ημερομηνία αξιολόγησης το χρόνο στον οποίο η πληρωμή αυτή θα γίνει. Η ημερομηνία αυτή είναι το τέλος του ένατου μήνα. Το αρχικό χρέος στην εν λόγω ημερομηνία αξιολόγησης ισούται με $2.400(1{,}02)^9$. Από την άλλη πλευρά, στην ίδια ημερομηνία αξιολόγησης, η αξία των 8 μηνιαίων πληρωμών, ισούται με $300(S_{\overline{9}|0,02}-1)$. Επομένως, το ανεξόφλητο δάνειο στο τέλος των 9 μηνών, δηλαδή η τιμή Μ, ισούται με

$$M = 2.400(1{,}02)^9 - 300(S_{\overline{9}|0,02}-1) =$$

$$= 2.400(1{,}195092)-300(8{,}754600) = 241.84 \text{ ευρώ}$$

# Προσδιορισμός του επιτοκίου

Η αγορά καταναλωτικών αγαθών με την δυνατότητα εξόφλησης με δόσεις είναι μια συνηθισμένη πρακτική. Συνήθως προσφέρεται στους αγοραστές μια τιμή «τοις μετρητοίς» και εναλλακτικά μια τιμή με πίστωση, η εξόφληση της οποίας θα πρέπει να γίνει με την πληρωμή μιας προκαταβολής στον χρόνο αγοράς και στη συνέχεια μιας σειράς δόσεων στο τέλος κάθε περιόδου και για t περιόδους. Η επιλογή εξαρτάται από το επιτόκιο με το οποίο επιβαρύνεται ο αγοραστής. Αρχικά υπολογίζουμε την ΠΑ της μοναδιαίας ράντας t όρων προς επιτόκιο ε ανά περίοδο από τη σχέση:

$$\alpha_{t\neg\varepsilon} = \frac{(\Pi\mathrm{A})}{B}$$

Για να υπολογίσουμε την τιμή του ε, ανατρέχουμε στους πίνακες όπου βρίσκουμε τις τιμές:

$$\alpha_{n\neg\varepsilon} < \alpha_{t\neg\varepsilon} < \alpha_{n+1\neg\varepsilon}$$

Για να υπολογίσουμε την τιμή του ε, χρησιμοποιούμε την μέθοδο της παρεμβολής:

$$\varepsilon = \varepsilon_{\mathrm{L}} + (\varepsilon_{\mathrm{H}} - \varepsilon_{\mathrm{L}})\left(\frac{\Sigma\Pi_{\mathrm{L}} - \Sigma\Pi_{\varepsilon}}{\Sigma\Pi_{\mathrm{L}} - \Sigma\Pi_{\mathrm{H}}}\right)$$

# Προσδιορισμός επιτοκίου με γνωστή παρούσα αξία - Παράδειγμα

Ένα ιατρικό μηχάνημα μπορεί να αγοραστεί είτε «τοις μετρητοίς» αντί 4.000 ευρώ, είτε με δόσεις καταβάλλοντας 500 ευρώ προκαταβολή και 280 ευρώ το μήνα επί 14 μήνες. Ζητείται να προσδιοριστεί το πραγματικό επιτόκιο με το οποίο θα επιβαρυνθεί ο αγοραστής του, αν επιλέξει την εξόφληση της τιμής με το σύστημα των δόσεων.

Χρησιμοποιώντας στη συνέχεια τη βασική εξίσωση αξίας, έχουμε

$$3.500 = 280\, \alpha_{\overline{14}|j}$$

και

$$\alpha_{\overline{14}|j} = \frac{3.500}{280} = 12,5$$

| | 1% | 2% |
|---|---|---|
| 1 | 0,9901 € | 0,9804 € |
| 2 | 1,9704 € | 1,9416 € |
| 3 | 2,9410 € | 2,8839 € |
| 4 | 3,9020 € | 3,8077 € |
| 5 | 4,8534 € | 4,7135 € |
| 6 | 5,7955 € | 5,6014 € |
| 7 | 6,7282 € | 6,4720 € |
| 8 | 7,6517 € | 7,3255 € |
| 9 | 8,5660 € | 8,1622 € |
| 10 | 9,4713 € | 8,9826 € |
| 11 | 10,3676 € | 9,7868 € |
| 12 | 11,2551 € | 10,5753 € |
| 13 | 12,1337 € | 11,3484 € |
| 14 | 13,0037 € | 12,1062 € |

$$\alpha_{n\neg\varepsilon} < \alpha_{t\neg\varepsilon} < \alpha_{n+1\neg\varepsilon}$$

Επομένως είναι μεταξύ 1% και 2% το μήνα και για την ακρίβεια με την μέθοδο της παρεμβολής :

$$\varepsilon = \varepsilon_L + (\varepsilon_H - \varepsilon_L)\left(\frac{\Sigma\Pi_L - \Sigma\Pi_\varepsilon}{\Sigma\Pi_L - \Sigma\Pi_H}\right) = 0,01 + (0,02 - 0,01)\left(\frac{13,0037 - 12,5}{13,0037 - 12,1062}\right) =$$

$$0,01 + 0,01\left(\frac{0,5037}{0,897}\right) =,0,01 + 0,005615 = 0,015615/\text{μήνα}$$



Επομένως $\varepsilon_{12}$ = 0,015615 * 12 = 0,187385 και ε = 0,202512