

# Σημείωμα για το Υπόδειγμα Ενδογενούς Ανάπτυξης του Πολ Ρόμερ

Οικονομική Ανάπτυξη — Ακαδημαϊκές Σημειώσεις

## 1 Δύο βασικά υποδείγματα του Πολ Ρόμερ

Ο Πολ Ρόμερ (Paul Romer) ανέπτυξε δύο διακριτά υποδείγματα ενδογενούς ανάπτυξης:

Χαρακτηριστικό	Romer (1986)	Romer (1990)
Βασικός μηχανισμός	Εξωτερικότητες από το συνολικό κεφάλαιο	Τρεις τομείς (E&A, ενδιάμεσα αγαθά, τελικό προϊόν)
Δομή αγοράς	Τέλειος ανταγωνισμός	Μονοπωλιακός ανταγωνισμός (πατέντες)
Εξωτερικότητες	Σε επίπεδο οικονομίας	Διάχυση γνώσης μεταξύ επιχειρήσεων
Ρόλος γνώσης	Παραπροϊόν επένδυσης σε κεφάλαιο	Παράγεται εσκεμμένα από E&A

Πίνακας 1: Σύγκριση των δύο υποδειγμάτων Romer

## 2 Εξωτερικότητες στον Romer (1990)

Εξωτερικότητα είναι το μη αποζημιωμένο όφελος που λαμβάνει μια επιχείρηση από την έρευνα και ανάπτυξη άλλων επιχειρήσεων.

## 2.1 Σε επίπεδο κλάδου

- Κάθε επιχείρηση που επενδύει σε E&A παράγει νέες ιδέες.
- Οι ιδέες δεν είναι πλήρως αποκλείσιμες.
- Μειώνεται το μελλοντικό κόστος έρευνας για όλες τις επιχειρήσεις.
- **Αποτέλεσμα:** η κοινωνική απόδοση της E&A είναι μεγαλύτερη από την ιδιωτική.

## 2.2 Σε επίπεδο επιχείρησης

- Η γνώση δεν είναι ανταγωνιστική (non-rival).
- Μια επιχείρηση δεν μπορεί να εσωτερικεύσει πλήρως τα οφέλη της γνώσης που παράγει.

# 3 Δυναμική της γνώσης — Romer (1990)

## 3.1 Εξίσωση παραγωγής γνώσης

Η βασική εξίσωση παραγωγής γνώσης είναι:

$$\dot{A} = \delta \cdot H_A \cdot A \quad (1)$$

όπου:

- $A$  είναι το απόθεμα γνώσης (αριθμός σχεδίων ή πατέντων)
- $H_A$  είναι το ανθρώπινο κεφάλαιο που απασχολείται στην E&A
- $\delta$  είναι η παραγωγικότητα της E&A — **σταθερά παραγωγικότητας, όχι απόσβεση**

## 3.2 Η παράμετρος $\delta$ : παραγωγικότητα, όχι απόσβεση

Η αναλογία με το φυσικό κεφάλαιο αποσαφηνίζει τη διαφορά:

$$\dot{K} = I - \delta_K \cdot K \quad (\text{φυσικό κεφάλαιο, με απόσβεση } \delta_K) \quad (2)$$

$$\dot{A} = \delta \cdot H_A \cdot A \quad (\text{γνώση, χωρίς απόσβεση}) \quad (3)$$

Εάν θέλαμε να εισάγουμε *απαξίωση γνώσης* (obsolescence), θα είχαμε:

$$\dot{A} = \delta \cdot H_A \cdot A - \sigma \cdot A, \quad \sigma > 0 \quad (4)$$

Αυτό **δεν υπάρχει** στο βασικό Romer (1990), γιατί οι ιδέες δεν φθείρονται από τη χρήση — είναι μη ανταγωνιστικές (non-rival) και μη αναλώσιμες.

### 3.3 Απαξίωση στις επεκτάσεις (Aghion-Howitt 1992)

Στο υπόδειγμα δημιουργικής καταστροφής (creative destruction), κάθε νέα καινοτομία καθιστά ξεπερασμένη την προηγούμενη:

$$\dot{A} = \delta \cdot H_A \cdot A - \sigma \cdot A \quad (5)$$

## 4 Ρυθμός ανάπτυξης στον Romer (1986)

Η συνάρτηση παραγωγής για κάθε επιχείρηση  $i$  είναι:

$$Y_i = A \cdot K_i^\alpha \cdot L_i^{1-\alpha} \cdot K^\beta \quad (6)$$

όπου  $K$  είναι το *συνολικό κεφάλαιο* της οικονομίας (πηγή εξωτερικότητας). Αθροίζοντας σε όλες τις επιχειρήσεις, η συγκεντρωτική συνάρτηση παραγωγής γίνεται:

$$Y = A \cdot K^{\alpha+\beta} \cdot L^{1-\alpha} \quad (7)$$

### 4.1 Βασικές εξισώσεις ρυθμού ανάπτυξης

Στη σταθερή κατάσταση (steady state), ο ρυθμός ανάπτυξης του κατά κεφαλήν προϊόντος:

$$g = \frac{n\beta}{1 - \alpha - \beta} \quad (8)$$

$$g = \frac{n(1 - \alpha)}{1 - \alpha - \beta} \quad (9)$$

όπου  $n$  είναι ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού και  $\alpha, \beta$  οι ελαστικότητες παραγωγής. Οι δύο εκφράσεις (8)-(9) είναι εναλλακτικές παραστάσεις του ίδιου ρυθμού ανάπτυξης.

## 4.2 Η συνθήκη $\alpha + \beta$ και ενδογενής ανάπτυξη

Η διατύπωση «χρειάζεται  $\alpha + \beta = 1$ » είναι υπεραπλούστευση. Η ορθή ανάλυση:

- $\alpha + \beta < 1$ : Φθίνουσες αποδόσεις στους συσσωρεύσιμους παράγοντες. Ο ρυθμός  $g$  είναι θετικός αλλά φθίνων — πλησιάζουμε νεοκλασικό αποτέλεσμα (Solow).
- $\alpha + \beta = 1$ : Ο παρονομαστής μηδενίζεται. Υπόδειγμα AK-τύπου με σταθερές αποδόσεις στο κεφάλαιο, *sustained long-run growth*.
- $\alpha + \beta > 1$ : Αύξουσες αποδόσεις — δεν υπάρχει σταθερή κατάσταση (εκρηκτική ανάπτυξη).

**Συμπέρασμα:** Η πραγματική συνθήκη για ενδογενή ανάπτυξη είναι  $\alpha + \beta \geq 1$ , με  $\alpha + \beta = 1$  να αντιστοιχεί στο οριακό (AK) υπόδειγμα.

## 5 Σχέση με το υπόδειγμα Harrod-Domar ( $Y = AK$ )

### 5.1 Harrod-Domar: εξωγενής ανάπτυξη

$$Y = A \cdot K \quad (10)$$

Σταθερές αποδόσεις στο κεφάλαιο, με  $A$  εξωγενές (σταθερό). Ο ρυθμός ανάπτυξης:

$$g_{HD} = \frac{s}{v} \quad (11)$$

όπου  $s$  ο ρυθμός αποταμίευσης και  $v$  ο συντελεστής κεφαλαίου-προϊόντος. Ο μηχανισμός παραγωγής του  $A$  παραμένει εξωγενής.

## 5.2 Romer (1986): ενδογενής εξωτερικότητα

Με την εξωτερικότητα  $K^\beta$ , η συγκεντρωτική συνάρτηση (7) γίνεται  $Y = A \cdot K^{\alpha+\beta} \cdot L^{1-\alpha}$ . Για  $\alpha + \beta = 1$ :

$$Y = A \cdot K \cdot L^{1-\alpha} \quad (12)$$

Όχι ακριβώς Harrod-Domar, γιατί παραμένει η εργασία  $L^{1-\alpha}$ . Η ομοιότητα εντοπίζεται στις σταθερές αποδόσεις στο συνολικό κεφάλαιο, αλλά ο μηχανισμός είναι εντελώς διαφορετικός: το  $A$  δεν είναι εξωγενές.

## 5.3 Romer (1990): γραμμικότητα στον τομέα της γνώσης

Στον τομέα παραγωγής τελικού προϊόντος:

$$Y = H_Y^\alpha \cdot L^\beta \int_0^A x(i)^{1-\alpha-\beta} di \quad (13)$$

όχι γραμμική στο  $A$ . Ωστόσο, στον τομέα E&A, από την εξίσωση (1):

$$\frac{\dot{A}}{A} = \delta \cdot H_A \quad (14)$$

Αυτή η εξίσωση μοιάζει με **Harrod-Domar για τον τομέα της γνώσης**: ο ρυθμός αύξησης της γνώσης ( $\dot{A}/A$ ) είναι ανάλογος του ανθρώπινου κεφαλαίου στην E&A. Η γνώση παίζει τον ρόλο του «κεφαλαίου» στον τομέα ιδεών, και το  $\delta$  είναι η «παραγωγικότητα» — όχι απόσβεση.

<b>Στοιχείο</b>	<b>Harrod-Domar</b>	<b>Romer (1986/1990)</b>
Συνάρτηση	$Y = AK$	$Y = AK^{\alpha+\beta}L^{1-\alpha}$
Παράμετρος $A$	Εξωγενής, σταθερή	Ενσωματωμένη σε εξωτερικότητες / παράγεται από E&A
Αποδόσεις στο $K$	Σταθερές ( $\alpha = 1$ )	Φθίνουσες ανά επιχ., σταθερές συνολικά αν $\alpha + \beta = 1$
Εργασία $L$	Απούσα ή σταθερή	Ρητά παρούσα
Κινητήρας ανάπτυξης	Ρυθμός αποταμίευσης $s$	Ενδογενής μέσω E&A και $H_A$
Πολιτική συμπέρασμα	Αυξήστε $s$	Ενισχύστε E&A και ανθρώπινο κεφάλαιο

Πίνακας 2: Σύγκριση Harrod-Domar και Romer

## 6 Σύνοψη

Ερώτηση	Απάντηση
Πού βρίσκονται οι εξωτερικότητες;	Στη διάχυση γνώσης (1990) ή στο συνολικό κεφάλαιο (1986)
Γιατί υπάρχει υποεπένδυση στην E&A;	Γιατί η κοινωνική απόδοση είναι μεγαλύτερη από την ιδιωτική
Τι είναι το $\delta$ ;	Παραγωγικότητα E&A — σταθερά, <b>όχι απόσβεση</b>
Αποσβένεται η γνώση;	Όχι στο βασικό υπόδειγμα. Σε επεκτάσεις: $\dot{A} = \delta H_A A - \sigma A$
Ποια η συνθήκη για ενδογενή ανάπτυξη;	$\alpha + \beta \geq 1$ . Για $\alpha + \beta = 1$ : ΑΚ-τύπος (οριακή περίπτωση)
Ρυθμός ανάπτυξης [Romer 1986];	$g = \frac{n\beta}{1 - \alpha - \beta} = \frac{n(1 - \alpha)}{1 - \alpha - \beta}$
Σχέση με Harrod-Domar;	Ομοιότητα στη γραμμικότητα κεφαλαίου ( $\alpha + \beta = 1$ ), αλλά ο μηχανισμός είναι ενδογενής — το $A$ παράγεται, δεν είναι εξωγενές

Πίνακας 3: Σύνοψη βασικών ερωτημάτων

## Βιβλιογραφία

- Romer, P. M. (1986). *Increasing Returns and Long-Run Growth*. *Journal of Political Economy*, 94(5), 1002-1037.
- Romer, P. M. (1990). *Endogenous Technological Change*. *Journal of Political Economy*, 98(5), S71-S102.
- Aghion, P., & Howitt, P. (1992). *A Model of Growth Through Creative Destruction*. *Econometrica*, 60(2), 323-351.
- Barro, R. J., & Sala-i-Martin, X. (2004). *Economic Growth* (2nd ed.). MIT Press.
- Harrod, R. F. (1939). *An Essay in Dynamic Theory*. *Economic Journal*, 49(193), 14-33.

- Domar, E. D. (1946). *Capital Expansion, Rate of Growth, and Employment*. *Econometrica*, 14(2), 137-147.