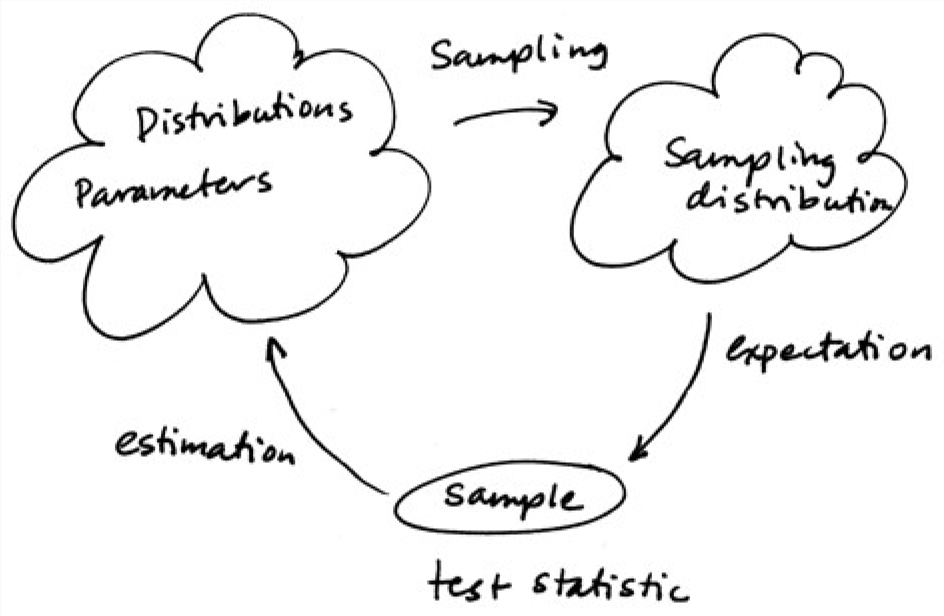
Διάλεξη 5

Έλεγχος Υποθέσεων με ένα δείγμα



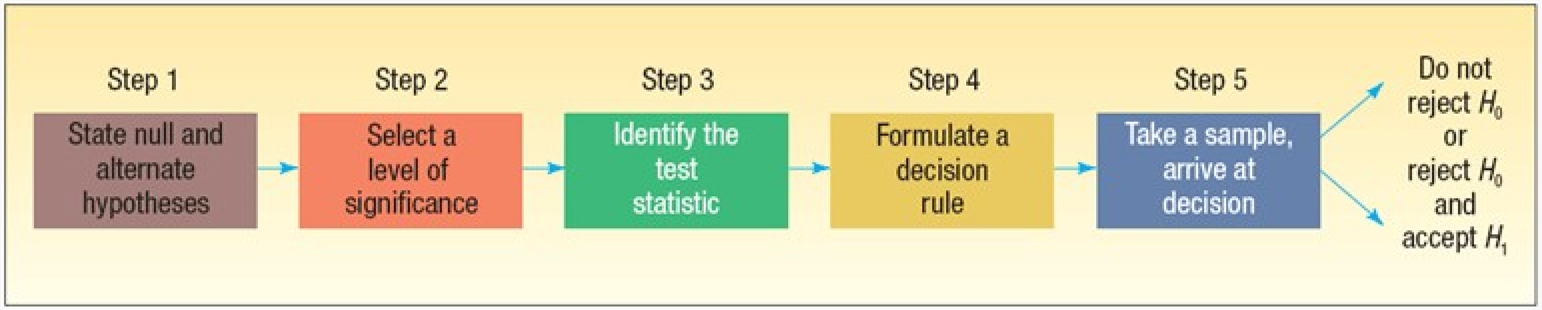
ΣΤΟΧΟΙ

1. Να κατανοηθούν οι όροι *υπόθεση* και *έλεγχος υπόθεσης*.
2. Να κατανοηθεί η διαδικασία πέντε βημάτων για τον έλεγχο μίας υπόθεσης.
3. Να γίνει διάκριση μεταξύ *μονοκατάληκτου* και *δικατάληκτου* ελέγχου.
4. Διεξαγωγή ελέγχου υποθέσεων για τον μέσο του πληθυσμό.
5. Διεξαγωγή ελέγχου υποθέσεων για μία αναλογία πληθυσμού.
6. Να κατανοηθούν τα σφάλματα *Τύπου I και Τύπου II*.

Υπόθεση και Έλεγχος Υποθέσεων

ΥΠΟΘΕΣΗ: Μια δήλωση σχετικά με την τιμή μιας παραμέτρου του πληθυσμού

ΕΛΕΓΧΟΣ ΥΠΟΘΕΣΗΣ: Μια διαδικασία που βασίζεται σε ενδείξεις ενός δείγματος και τη θεωρία πιθανοτήτων προκειμένου να καθοριστεί αν η υπόθεση είναι μια λογική δήλωση.



ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΕΛΕΓΧΟΥ: Η τιμή, η οποία καθορίζεται από τις πληροφορίες του δείγματος και χρησιμοποιείται για να καθορίσει εάν θα απορριφθεί ή όχι η μηδενική υπόθεση.

ΚΡΙΤΙΚΗ ΤΙΜΗ: Το διαχωριστικό σημείο μεταξύ της περιοχής όπου η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται και την περιοχή όπου δεν απορρίπτεται.

Σημαντικά πράγματα που πρέπει να θυμάστε σχετικά με τις H_0 και H_1

- H_0: Μηδενική υπόθεση και
  H_1: Εναλλακτική υπόθεση
- Οι H_0 και H_1 είναι αμοιβαία αποκλειόμενες.
- H_0: Πάντα θεωρείται ότι είναι η αληθινή
- Ένα τυχαίο δείγμα (*n*) χρησιμοποιείται για να *απορρίψει ή όχι την* H_0.
- Αν καταλήξουμε στο: **αποτυγχάνεται η απόρριψη της H_0**, αυτό δε σημαίνει απαραίτητα ότι η H_0 είναι αληθής. Δείχνει μόνο ότι δεν υπάρχουν αρκετές ενδείξεις ώστε να απορριφθεί η H_0. Αντίστοιχα η απόρριψη της H_0 δείχνει ότι η εναλλακτική υπόθεση μπορεί να είναι αληθινή.
- Η ισότητα είναι πάντα μέρος της H_0 (π.χ. "=" , "≥" , "≤").
- "≠" "<" και ">" είναι πάντα μέρος της H_1

Λέξεις-κλειδιά	Σύμβολα ανισότητας	Μέρη της:
Μεγαλύτερο (ή περισσότερο) από	>	H_1
Μικρότερο (ή λιγότερο) από	<	H_1
Όχι περισσότερο από	≤	H_0
Τουλάχιστον	≥	H_0
Έχει αυξηθεί	>	H_1
Υπάρχει διαφορά?	≠	H_1
Δεν έχει αλλάξει	=	H_0
Έχει "βελτιωθεί" , "είναι καλύτερο από", "είναι πιο αποτελεσματικό από"	>	H_1

Διαμόρφωση Υποθέσεων για τον Έλεγχο ενός Μέσου (μ) ή μίας Αναλογίας (π)

ΜΕΣΟΣ

$H_0: \mu = \text{value}$	$H_0: \mu \geq \text{value}$	$H_0: \mu \leq \text{value}$
$H_1: \mu \neq \text{value}$	$H_1: \mu < \text{value}$	$H_1: \mu > \text{value}$
Reject H_0 if:	Reject H_0 if:	Reject H_0 if:
$\lvert Z \rvert > Z_{\alpha/2}$	$Z < -Z_\alpha$	$Z > Z_\alpha$
$\lvert t \rvert > t_{\alpha/2,\ n-1}$	$t < -t_{\alpha,\ n-1}$	$t > t_{\alpha,\ n-1}$

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

ΑΝΑΛΟΓΙΑ

$H_0: \pi = \text{value}$	$H_0: \pi \geq \text{value}$	$H_0: \pi \leq \text{value}$
$H_1: \pi \neq \text{value}$	$H_1: \pi < \text{value}$	$H_1: \pi > \text{value}$
Reject H_0 if:	Reject H_0 if:	Reject H_0 if:
$\lvert Z \rvert > Z_{\alpha/2}$	$Z < -Z_\alpha$	$Z > Z_\alpha$

$$z = \frac{p - \pi}{\sqrt{\dfrac{\pi(1-\pi)}{n}}}$$

Έλεγχος για το Μέσο ενός Πληθυσμού με Γνωστή Τυπική Απόκλιση – Παράδειγμα I.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Η Jamestown Steel Company κατασκευάζει και συναρμολογεί γραφεία και λοιπό εξοπλισμό γραφείου. Η εβδομαδιαία παραγωγή γραφείου μοννtέλου A325 στο Fredonia Plant ακολουθεί την κανονική κατανομή πιθανότητας με ***μέση τιμή* 200** και ***τυπική απόκλιση 16***. Πρόσφατα, έχουν εισαχθεί νέες μέθοδοι παραγωγής και έχουν γίνει νέες προσλήψεις. Η V.P. της μεταποιητικής εταιρείας θα ήθελε να διερευνήσει κατά πόσο υπήρξε κάποια ***μεταβολή*** στην εβδομαδιαία παραγωγή του γραφείο μοντέλου A325. Έστω ότι η εβδομαδιαία μέση παραγωγή είναι 203.5.

Βήμα 1: Ορίστε την μηδενική και την εναλλακτική υπόθεση

H_0: $\mu = 200$

H_1: $\mu \neq 200$

(σημείωση: λέξη-κλειδί του προβλήματος "έχει μεταβληθεί")

Βήμα 2: Επιλέξτε το επίπεδο σημαντικότητας.

α = 0.01 όπως αναφέρεται στο πρόβλημα

Βήμα 3: Επιλέξτε τον στατιστικό έλεγχο.

Χρησιμοποιήστε την Z-κατανομή από τη στιγμή που το **σ** είναι γνωστό

Βήμα 4: Διατυπώστε τον κανόνα απόφασης.

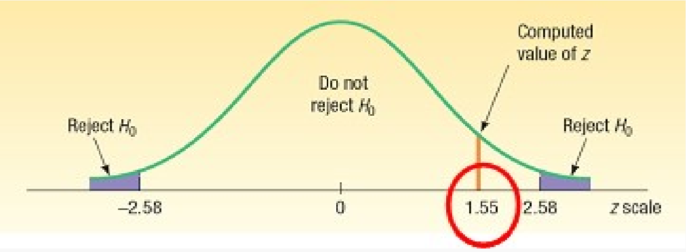
Reject H_0 if $|Z| > Z_{\alpha/2}$

$$|Z| > Z_{\alpha/2}$$

$$\left|\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}\right| > Z_{\alpha/2}$$

$$\left|\frac{203.5 - 200}{16 / \sqrt{50}}\right| > Z_{.01/2}$$

$$1.55 \text{ is not } > 2.58$$



Βήμα 5: Διατυπώστε την απόφαση και ερμηνεύστε το αποτέλεσμα.

Επειδή το 1.55 δεν εμπίπτει στην περιοχή απόρριψης, η H_0 δεν απορρίπτεται. Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η μέση τιμή δεν είναι διαφορετική από 200. Γι 'αυτό και θα υποβληθεί έκθεση στον αντιπρόεδρο της μεταποιητικής εταιρείας ότι τα στοιχεία του δείγματος δεν δείχνουν ότι ο ρυθμός παραγωγής στο εργοστάσιο έχει αλλάξει από 200 ανά εβδομάδα.

Έλεγχος για το Μέσο ενός Πληθυσμού με Γνωστή Τυπική Απόκλιση – Παράδειγμα ΙΙ.

Ας υποθέσουμε ότι στο προηγούμενο πρόβλημα η αντιπρόεδρος θέλει να γνωρίζει αν υπήρξε μια αύξηση στον αριθμό των μονάδων που συναρμολογούνται. Για να το θέσουμε αλλιώς, μπορούμε να συμπεράνουμε, λόγω των βελτιωμένων μεθόδων παραγωγής, ότι ο μέσος αριθμός των γραφείων που συναρμολογούνται στις τελευταίες 50 εβδομάδες ήταν πάνω από 200;

Ανακαλέστε ότι: $\sigma=16$, $n=200$, $\alpha=.01$

Βήμα 1: Ορίστε την μηδενική και την εναλλακτική υπόθεση.

H_0: $\mu \leq 200$

H_1: $\mu > 200$

(σημείωση: λέξη-κλειδί του προβλήματος "μία αύξηση")

Βήμα 2: Επιλέξτε το επίπεδο σημαντικότητας.

$\alpha = 0.01$ όπως αναφέρεται στο πρόβλημα

Βήμα 3: Επιλέξτε τον στατιστικό έλεγχο.

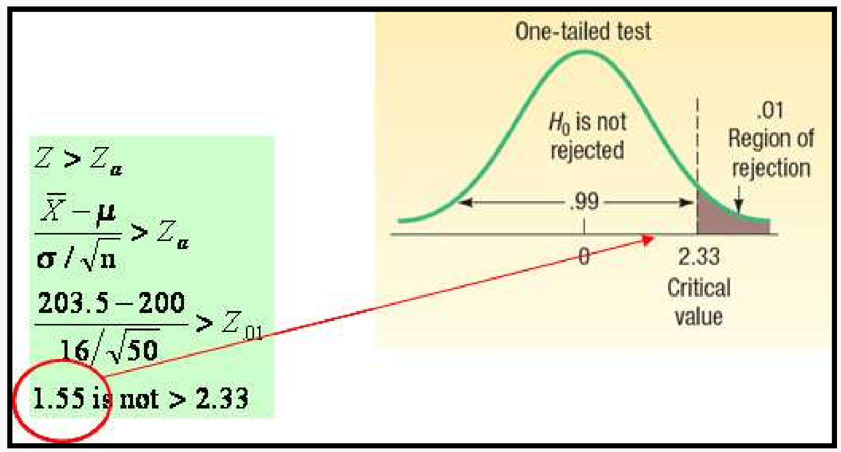
Χρησιμοποιήστε την Z-κατανομή από τη στιγμή που το **σ** είναι γνωστό

Step 4: Διατυπώστε τον κανόνα απόφασης

Reject H_0 if $Z > Z_\alpha$

Βήμα 5: Βήμα 5: Διατυπώστε την απόφαση και ερμηνεύστε το αποτέλεσμα.

Επειδή το 1.55 δεν εμπίπτει στην περιοχή απόρριψης, η H_0 δεν απορρίπτεται. Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο μέσος αριθμός των γραφείων που συναρμολογούνται τις τελευταίες 50 εβδομάδων στατιστικά δεν είναι πάνω από 200



Τύποι σφαλμάτων και *p*-value στον Έλεγχο Υποθέσεων

- **Σφάλμα Τύπου I:**
  - Ορίζεται ως η πιθανότητα απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης όταν είναι όντως αληθινή.
  - Αυτό συμβολίζεται με το ελληνικό γράμμα “α”
  - Επίσης γνωστό ως το επίπεδο σημαντικότητας ενός ελέγχου.
- **Σφάλμα Τύπου II:**
  - Ορίζεται ως η πιθανότητα «αποδοχής» της μηδενικής υπόθεσης όταν είναι στην πραγματικότητα ψευδής.
  - Αυτό συμβολίζεται με το ελληνικό γράμμα “β”
- ***p*-VALUE** είναι η πιθανότητα παρατήρησης μιας τιμής του δείγματος τόσο ακραία ή περισσότερο ακραία από, την τιμή που υπολογίστηκε, δεδομένου ότι η μηδενική υπόθεση είναι αληθινή.
- Κατά τον έλεγχο μιας υπόθεσης, μπορούμε επίσης να συγκρίνουμε το *p*-value με το επίπεδο σημαντικότητας (α).
- Κανόνας απόφασης για τη χρήση της *p*-value:

  Απορρίψτε τη H_0 αν η *p*-value < επίπεδο σημαντικότητας

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ *p*-Value

Ανακαλέστε το προηγούμενο παράδειγμα όπου οι κανόνες του ελέγχου πόθέσεων ήταν ως εξής:

H_0: $\mu \le 200$

H_1: $\mu > 200$

Απορρίψτε την H_0 αν $Z > Z_\alpha$

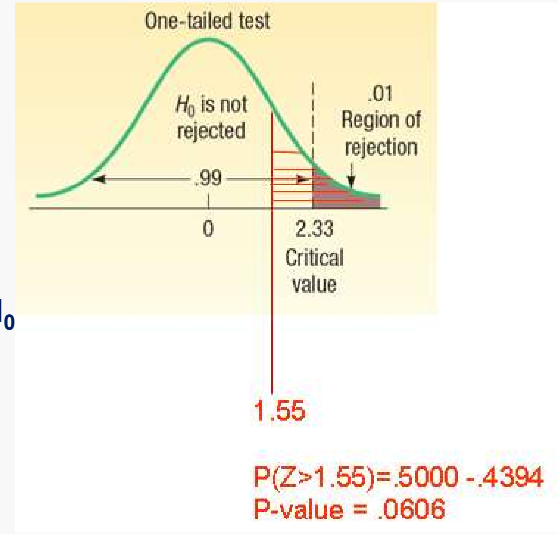
όπου $Z = 1.55$ και $Z_\alpha = 2.33$

Απορρίψτε την H_0 αν η *p*-value < α

0.0606 δεν είναι< 0.01

Συμπέρασμα:

Αποτύχαμε να απορρίψουμε την H_0



Έλεγχος του Πληθυσμιακού Μέσου: Τυπική Απόκλιση Πληθυσμού Άγνωστη

Όταν η τυπική απόκλιση του πληθυσμού (σ) είναι άγνωστη, η τυπική απόκλιση του δείγματος (s) χρησιμοποιείται στην θέση της και η κατανομή t χρησιμοποιείται ως στατιστικός έλεγχος, η οποία υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τον ακόλουθο τύπο:

TESTING A MEAN, σ UNKNOWN $$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

Όπου:

$\bar{x}$: είναι ο συμβολισμός για τον μέσο του δείγματος

μ :ο πληθυσμιακός μέσος

s :η δειγματική τυπική απόκλιση

n :είναι ο συνολικός αριθμός των παρατηρήσεων

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Το Τμήμα Απαιτήσεων της McFarland Ασφαλιστικής Εταιρείας αναφέρει ότι το μέσο κόστος για να επεξεργαστεί μια απαίτηση είναι $ 60. Μια σύγκριση με επιχειρήσεις του κλάδου έδειξε ότι αυτό το ποσό είναι μεγαλύτερο από άλλες ασφαλιστικές εταιρείες, με αποτέλεσμα η εταιρεία να λάβει μέτρα περιορισμού του κόστους. Για να αξιολογηθεί η επίδραση των μέτρων περικοπής δαπανών, ο επόπτης του Τμήματος Απαιτήσεων επέλεξε ένα τυχαίο δείγμα 26 αιτήσεων που υποβλήθηκαν τον περασμένο μήνα. Οι σχετικές πληροφορίες αναφέρεται παρακάτω:

$45	$49	$62	$40	$43	$61
48	53	67	63	78	64
48	54	51	56	63	69
58	51	58	59	56	57
38	76				

Σε επίπεδο σημαντικότητας 0.01 είναι εύλογο μία απαίτηση να κοστίζει *λιγότερο από $60*;

Έλεγχος του Πληθυσμιακού Μέσου: Τυπική Απόκλιση Πληθυσμού Άγνωστη- Παράδειγμα

Βήμα 1: Ορίστε την μηδενική και την εναλλακτική υπόθεση.

H_0: μ ≥ \$60

H_1: μ < \$60

Βήμα 2: Επιλέξτε το επίπεδο σημαντικότητας.

α = 0.01, όπως αναφέρεται στο πρόβλημα

Βήμα 3: Επιλέξτε τον στατιστικό έλεγχο.

Χρησιμοποιήστε την ***t*-κατανομή** από τη στιγμή που το σ είναι αγνωστό.

Βήμα 4: Διατυπώστε τον κανόνα απόφασης.

Απόρρίψτε την H_0 αν $t < -t_{\alpha,n-1}$

Βήμα 5: Βήμα 5: Διατυπώστε την απόφαση και ερμηνεύστε το αποτέλεσμα

Επειδή το -1.818 δεν εμπίπτει στην περιοχή απόρριψης, η H_0 δεν απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας 0.01. Εμείς δεν έχουμε αποδείξει ότι τα μέτρα περικοπής των δαπανών μείωσαν το μέσο κόστος ανά απαίτηση σε λιγότερο από \$ 60. Η διαφορά των \$ 3.58 (\$ 56.42 - \$ 60) μεταξύ του δείγματος σημαίνει ότι και η μέση τιμή του πληθυσμού θα μπορούσε να οφείλεται σε δειγματοληπτικό σφάλμα.

TABLE 10–1 A Portion of the *t* Distribution Table

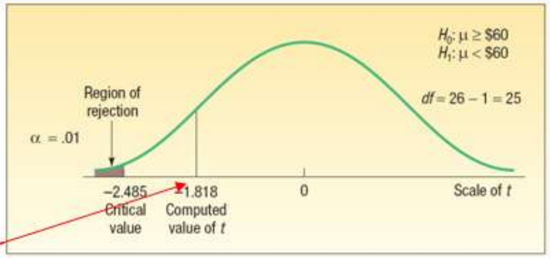
	Confidence Intervals					
	80%	90%	95%	98%	99%	99.9%
	Level of Significance for One-Tailed Test, α					
df	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.0005
	Level of Significance for Two-Tailed Test, α					
	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.001
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.768
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646

$$t < -t_{\alpha,n-1}$$

$$\frac{\overline{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} < -t_{\alpha,n-1}$$

$$\frac{\$56.42-\$60}{\$10.04/\sqrt{26}} < -t_{.01,26-1}$$

$$-1.818 \text{ is not} < -2.485$$



Έλεγχος της Αναλογίας Πληθυσμού με τη χρήση της z-Κατανομής

- Μία Αναλογία που δείχνει το τμήμα του πληθυσμού ή του δείγματος που έχει ένα συγκεκριμένο χαρακτηριστικό ενδιαφέροντος. Η αναλογία του δείγματος συμβολίζεται με *p* και βρίσκεται από το **x/n.**
- Θεωρείται ότι οι διωνυμικές υποθέσεις που συζητήθηκαν στο ppt file 6 πληρούνται:

(1) τα δεδομένα του δείγματος που συλλέγονται μετά από μέτρηση.

(2) το αποτέλεσμα ενός πειράματος κατατάσσεται σε μία από τις δύο κατηγορίες "επιτυχία" ή "αποτυχία";

(3) η πιθανότητα μιας επιτυχίας είναι η ίδια για κάθε δοκιμή και

(4) οι δοκιμές είναι ανεξάρτητες

- Τόσο το $n\pi$ και το $n(1-\pi)$ είναι τουλάχιστον 5.
- Όταν πληρούνται οι παραπάνω προϋποθέσεις, η κανονική κατανομή μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μια προσέγγιση της διωνυμικής κατανομής.
- Ο στατιστικός έλεγχος υπολογίζεται ως εξής:

TEST OF HYPOTHESIS, ONE PROPORTION

$$z = \frac{p - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}} \qquad [10\text{–}3]$$

Όπου:
π: είναι η αναλογία του Πληθυσμού
p: είναι η αναλογία του Δείγματος
n : είναι το μέγεθος του δείγματος

Έλεγχος Αναλογίας Πληθυσμού - Παράδειγμα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ας υποθέσουμε ότι πριν από τις εκλογές σε μια συγκεκριμένη πολιτεία, είναι απαραίτητο για έναν υποψήφιο κυβερνήτη να λάβει τουλάχιστον το 80% στο βόρειο τμήμα της πολιτείας ώστε να εκλεγεί. Ο εν λόγω κυβερνήτης ενδιαφέρεται να εκτιμηθούν οι πιθανότητες του να επιστρέψει στην εξουσία και σχεδιάζει να πραγματοποιήσει μια έρευνα με δείγμα 2.000 εγγεγραμμένων ψηφοφόρων στο βόρειο τμήμα της πολιτείας. Χρησιμοποιώντας τη διαδικασία ελέγχου υπόθεσης, να αξιολογούν τις πιθανότητες επανεκλογής του κυβερνήτη.

(1550 είπαν ότι θα ψηφίσουν τον κυβερνήτη)

Βήμα 1: Ορίστε την μηδενική και την εναλλακτική υπόθεση.

H_0: $\pi \geq .80$

H_1: $\pi < .80$

(σημείωση: λέξη-κλειδί του προβλήματος "τουλάχιστον")

Βήμα 2: Επιλέξτε το επίπεδο σημαντικότητας.

$\alpha = 0.05$

Βήμα 3: Επιλέξτε τον στατιστικό έλεγχο.

Χρησιμοποιήστε την Z-κατανομή από τη στιγμή που πλοιρούνται οι υποθέσεις και $n\pi$ και $n(1-\pi) \geq 5$

Step 4: Διατυπώστε τον κανόνα απόφασης

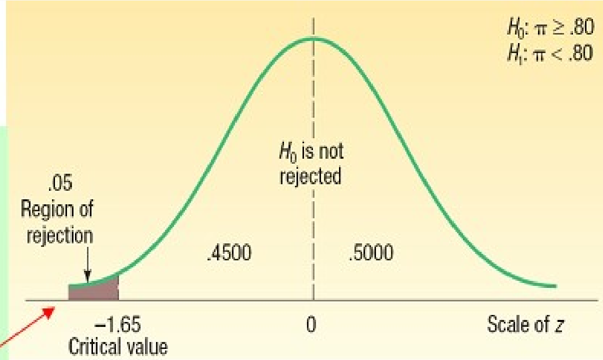
Reject H_0 if $Z < -Z_\alpha$

$$Z < -Z_\alpha$$

$$\frac{p-\pi}{\sqrt{\dfrac{\pi(1-\pi)}{n}}} < -z_\alpha$$

$$\frac{\dfrac{1,550}{2,000} - .80}{\sqrt{\dfrac{.80(1-.80)}{2,000}}} < -1.65$$

$$-2.80 < -1.65$$



Βήμα 5: Βήμα 5: Διατυπώστε την απόφαση και ερμηνεύστε το αποτέλεσμα.

Ο εκτιμώμενη τιμή της z (-2.80) είναι στην περιοχή απόρριψης και έτσι η H_0 απορρίπτεται στο επίπεδο του 0.05. Τα στοιχεία σε αυτό το σημείο δεν υποστηρίζουν τον ισχυρισμό ότι ο κυβερνήτης θα επιστρέψει στην εξουσία για άλλα τέσσερα χρόνια.