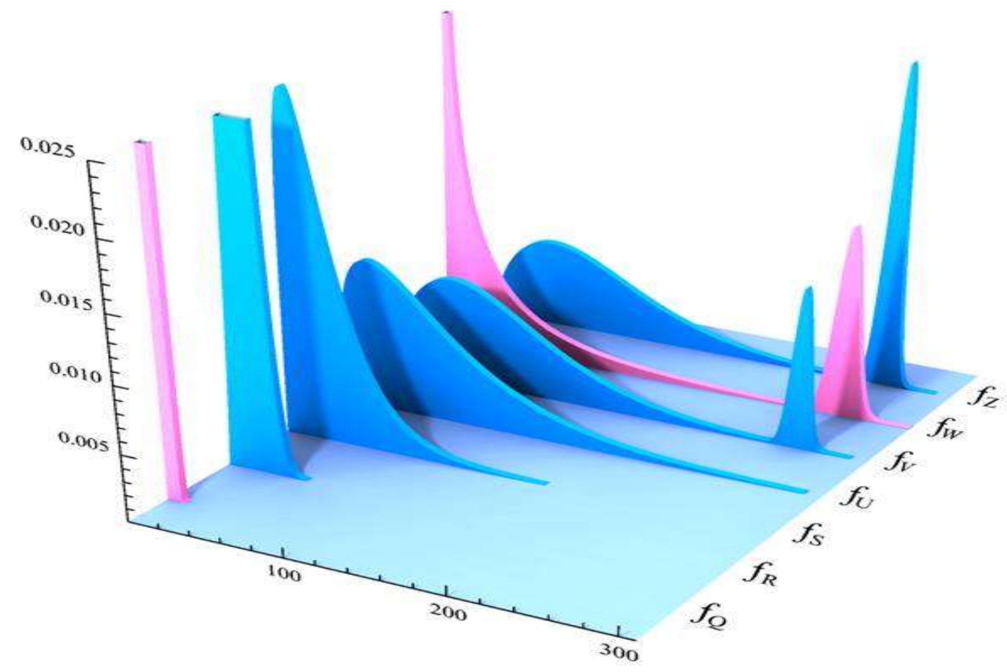
Διάλεξη 3

Συνεχείς Κατανομές Πιθανοτήτων:

Ομοιόμορφη κατανομή

Κανονική κατανομή



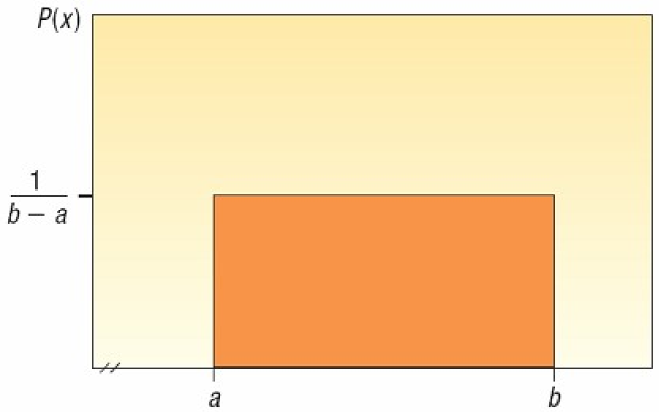
ΣΤΟΧΟΙ

1. Κατανόηση διαφοράς μεταξύ διακριτής και συνεχής κατανομής.
2. Υπολογισμός του μέσου και της τυπικής απόκλισης για μία *ομοιόμορφη κατανομή.*
3. Υπολογισμός πιθανοτήτων με τη χρήση ομοιόμορφης κατανομής.
4. Να αναφερθούν τα χαρακτηριστικά της κανονικής κατανομής πιθανοτήτων.
5. Να καθοριστούν και να υπολογιστούν οι τιμές z.
6. Να προσδιοριστεί η πιθανότητα ότι μια παρατήρηση είναι μεταξύ δύο σημείων σε μια κανονική κατανομή πιθανοτήτων.
7. Να προσδιοριστεί η πιθανότητα ότι μια παρατήρηση είναι πάνω (ή κάτω) από ένα σημείο σε μια κανονική κατανομή πιθανοτήτων.

Ομοιόμορφη Κατανομή

Η ομοιόμορφη κατανομή πιθανοτήτων είναι ίσως η πιο απλή κατανομή για μια συνεχή τυχαία μεταβλητή.

Αυτή η κατανομή είναι ορθογώνιου σχήματος και ορίζεται από τις ελάχιστες και μέγιστες τιμές.



MEAN OF THE UNIFORM DISTRIBUTION $\mu = \frac{a+b}{2}$ **[7–1]**

STANDARD DEVIATION OF THE UNIFORM DISTRIBUTION $\sigma = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}$ **[7–2]**

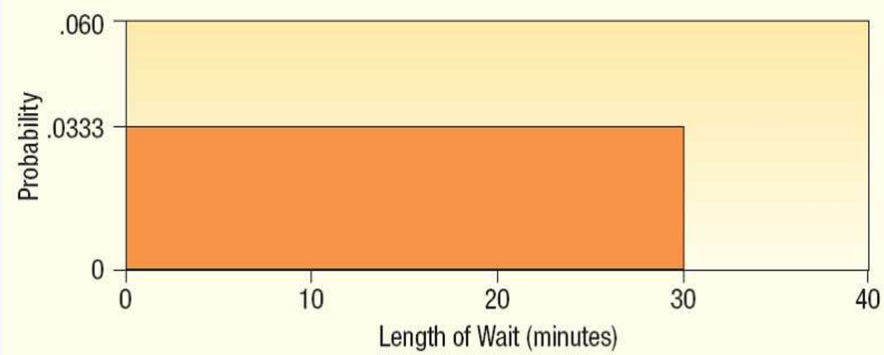
UNIFORM DISTRIBUTION $P(x) = \frac{1}{b-a}$ if $a \leq x \leq b$ and 0 elsewhere **[7–3]**

Ομοιόμορφη Κατανομή - Παράδειγμα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Το κρατικό πανεπιστήμιο της Southwest Arizona παρέχει υπηρεσία μεταφοράς με λεωφορείο προς τους μαθητές, ενώ βρίσκονται στην πανεπιστημιούπολη. Ένα λεωφορείο κατά τη διάρκεια της εβδομάδας κάνει στάση στο North Main Street και College Drive κάθε 30 λεπτά, από τις 06:00 έως τις 23:00 Οι μαθητές φθάνουν στη στάση του λεωφορείου σε τυχαίες χρονικές στιγμές. Ο χρόνος που ένας σπουδαστής περιμένει είναι ομοιόμορφα κατανεμημένος από 0 έως 30 λεπτά.

1. Σχεδιάστε ένα γράφημα της κατανομής αυτής.
2. Δείξτε ότι το εμβαδόν αυτής της ομοιόμορφης κατανομής είναι 1.
3. Πόσο καιρό “τυπικά” θα πρέπει να περιμένει ένας φοιτητής για ένα λεωφορείο; Με άλλα λόγια, ποιος είναι ο μέσος χρόνος αναμονής; Ποια είναι η τυπική απόκλιση του χρόνου αναμονής;
4. Ποια είναι η πιθανότητα ένας φοιτητής να περιμένει από 10 έως 20 λεπτά;



The times students must wait for the bus is uniform over the interval from 0 minutes to 30 minutes, so in this case *a* is 0 and *b* is 30.

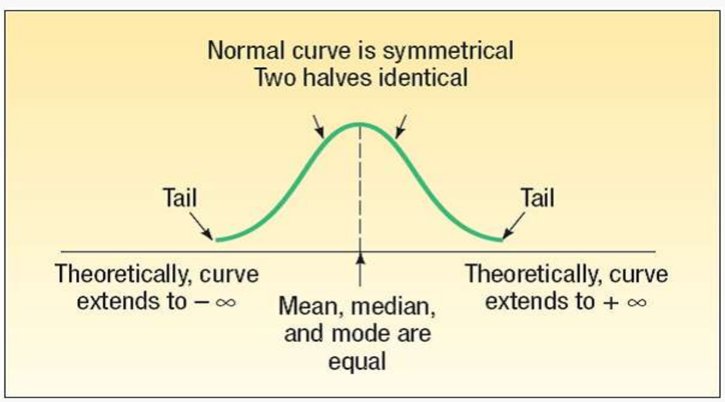
$$\text{Area} = (\text{height})(\text{base}) = \frac{1}{(30-0)}(30-0) = 1.00$$

$$\mu = \frac{a+b}{2} = \frac{0+30}{2} = 15 \qquad \sigma = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}} = \sqrt{\frac{(30-0)^2}{12}} = 8.66$$

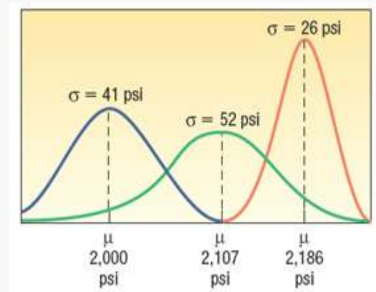
$$\begin{aligned} P(10 < \text{Wait Time} < 20) &= (\text{height})(\text{base}) \\ &= \frac{1}{(30-0)}(10) \\ &= 0.3333 \end{aligned}$$

Κανονική Κατανομή Πιθανοτήτων

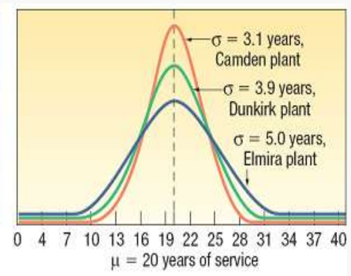
1. Είναι σε σχήμα καμπάνας και έχει μία μοναδική κορυφή στο κέντρο της κατανομής. Γύρω από το μέσο υπάρχει συμμετρία.
2. Είναι ασυμπτωτική: Η καμπύλη πλησιάζει όλο και πιο κοντά στον άξονα X, αλλά ποτέ δεν τον αγγίζει πραγματικά. Η θέση μιας κανονικής κατανομής προσδιορίζεται από τη μέση τιμή, μ, η διασπορά ή εξάπλωση της κατανομής προσδιορίζεται με την τυπική απόκλιση, σ.
3. Ο αριθμητικός μέσος, η διάμεσος, και η επικρατούσα τιμή είναι ίσοι.
4. Το συνολικό εμβαδόν κάτω από την καμπύλη είναι 1.00: η μισή περιοχή κάτω από την κανονική καμπύλη είναι προς τα δεξιά του μέσου και το άλλο μισό προς τα αριστερά του μέσου.



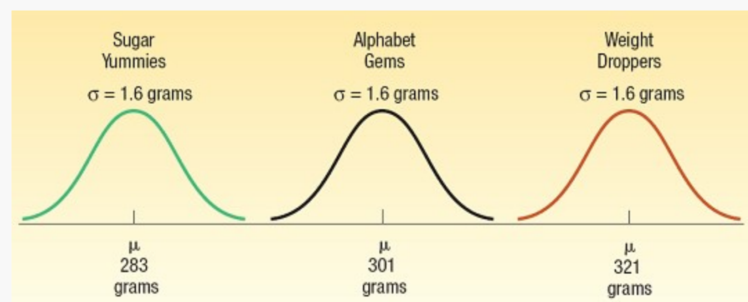
Family of Distributions



Different Means and Standard Deviations



Equal Means and Different Standard Deviations



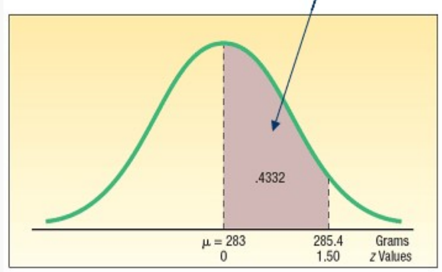
Different Means and Equal Standard Deviations

Τυποποιημένη Κανονική Κατανομή Πιθανοτήτων

- Η τυπική κανονική κατανομή είναι μια κανονική κατανομή με μέσο όρο μηδέν και τυπική απόκλιση **1.**
- Ονομάζεται επίσης η κατανομή **z**.
- Μια τιμή **z** είναι η απόσταση μεταξύ μιας επιλεγμένης τιμής **X**, και του πληθυσμιακού μέσου **μ**, διαιρούμενη με την πληθυσμιακή τυπική απόκλιση, **σ**.
- Ο τύπος είναι ο εξής:

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	...
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	
.							
.							
.							



Κανονική Κατανομή - Παράδειγμα

Τα εβδομαδιαία εισοδήματα των επιστατών βάρδιας σε μια βιομηχανία γυαλιού ακολουθούν την κανονική κατανομή πιθανοτήτων με μέσο όρο $1,000 και τυπική απόκλιση $100.

Ποια είναι η τιμή **z** για το εισόδημα, ας το πούμε ***X***, για έναν επιστάτη που παίρνει $1,100 την εβδομάδα; Και ποια ένα επιστάτη που παίρνει $900 την εβδομάδα;

For X = $1,100:

$$z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{\$1{,}100 - \$1{,}000}{\$100} = 1.00$$

For X = $900:

$$z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{\$900 - \$1{,}000}{\$100} = -1.00$$

Ο Εμπειρικός Κανόνας - Παράδειγμα

Ως μέρος του προγράμματος διασφάλισης της ποιότητας, η Εταιρεία Autolite Battery διεξάγει δοκιμές για τη ζωή ενός τύπου μπαταρίας.

Για μία συγκεκριμένη αλκαλική μπαταρία D-cell, η μέση διάρκεια ζωής είναι 19 ώρες. Η ωφέλιμη ζωή της μπαταρίας ακολουθεί κανονική κατανομή με τυπική απόκλιση 1.2 ωρών.

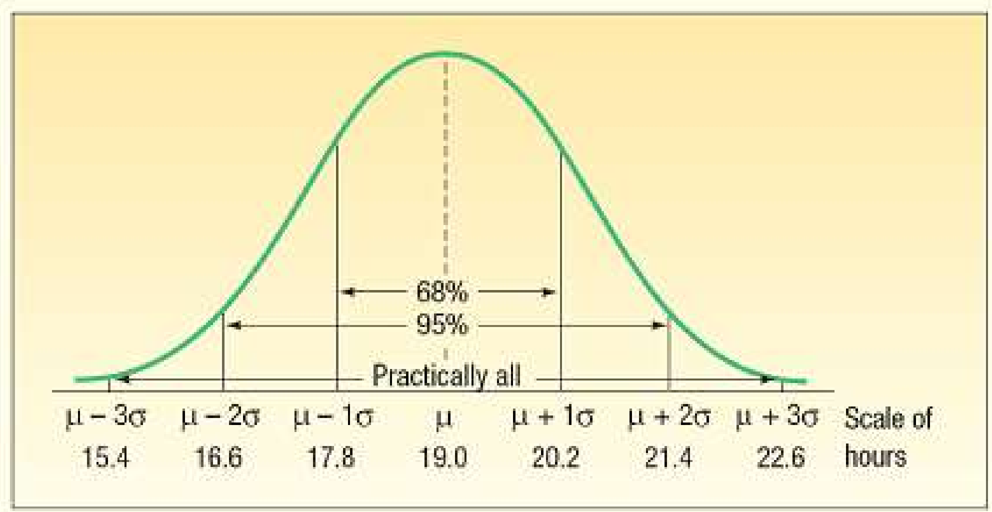
Απαντήστε στις ακόλουθες ερωτήσεις:

1. Μεταξύ ποιων τιμών απέτυχε το 68% των μπαταριών;
2. Μεταξύ ποιων τιμών απέτυχε το 95% των μπαταριών;
3. Μεταξύ ποιων τιμών απέτυχαν σχεδόν όλες οι μπραταρίες;

We can use the results of the Empirical Rule to answer these questions.

1. About 68 percent of the batteries will fail between 17.8 and 20.2 hours by 19.0 ± 1(1.2) hours.
2. About 95 percent of the batteries will fail between 16.6 and 21.4 hours by 19.0 ± 2(1.2) hours.
3. Virtually all failed between 15.4 and 22.6 hours, found by 19.0 ± 3(1.2)

This information is summarized on the following chart.



Κανονική Κατανομή – Βρίσκοντας Πιθανότητες

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Το μέσο εβδομαδιαίο εισόδημα ενός επιστάτη σε μία βιομηχανία γυαλιού ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσο όρο τα $1,000 και τυπική απόκλιση τα $100.

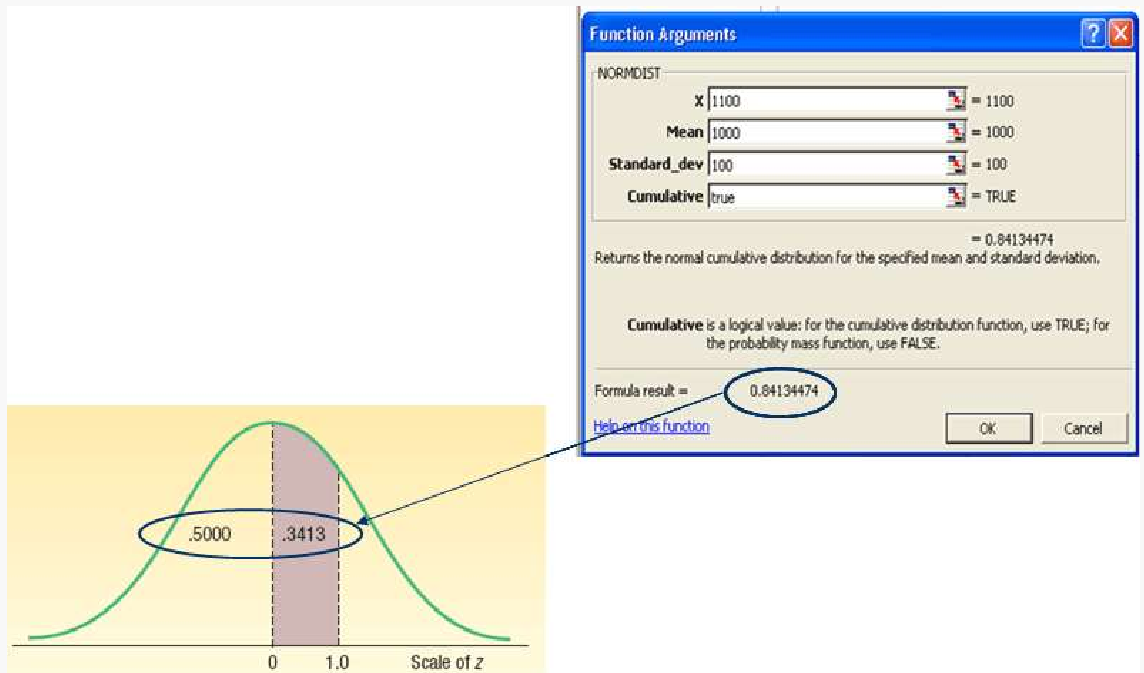
Ποια είναι η πιθανότητα επιλογής ενός επιστάτη του οποίου το εβδομαδιαίο εισόδημα είναι μεταξύ $ 1.000 και $ 1.100;

For X = $1,000:

$$z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{\$1{,}000-\$1{,}000}{\$100} = 0.00$$

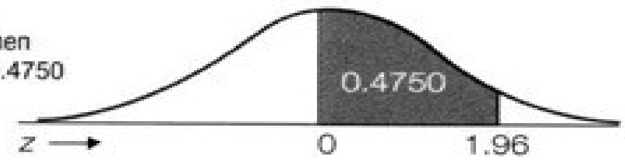
For X = $1,100:

$$z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{\$1{,}100-\$1{,}000}{\$100} = 1.00$$



Areas under the Normal Curve

Example:
If $z = 1.96$, then
$P(0 \text{ to } z) = 0.4750$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

Κανονική Κατανομή – Βρίσκοντας Πιθανότητες (Παράδειγμα 2)

Ανατρέξτε στα δεδομένα σχετικά με τα εβδομαδιαία εισοδήματα των επιστατών βάρδιας στη βιομηχανία γυαλιού. Η κατανομή των εβδομαδιαίων εισοδημάτων ακολουθεί την κανονική κατανομή πιθανοτήτων με μέση τιμή τα $ 1.000 και τυπική απόκλιση $ 100.

Ποια είναι η πιθανότητα επιλογής ενός επιστάτη του οποίου το εβδομαδιαίο εισόδημα είναι:

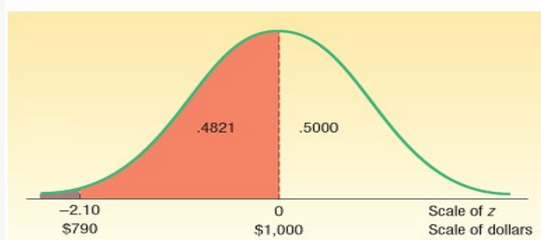
Μεταξύ $790 *και* $1,000;

For $X = \$790$:

$$z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{\$790 - \$1,000}{\$100} = -2.10$$

For $X = \$1,000$:

$$z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{\$1,000 - \$1,000}{\$100} = 0.00$$



Ποια είναι η πιθανότητα επιλογής ενός επιστάτη του οποίου το εβδομαδιαίο εισόδημα είναι:

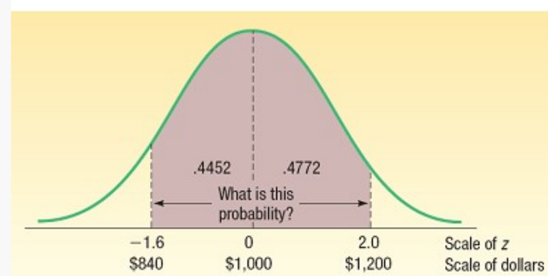
Μεταξύ $840 ***και*** $1,200.

For $X = \$840$:

$$z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{\$840 - \$1,000}{\$100} = -1.60$$

For $X = \$1,200$:

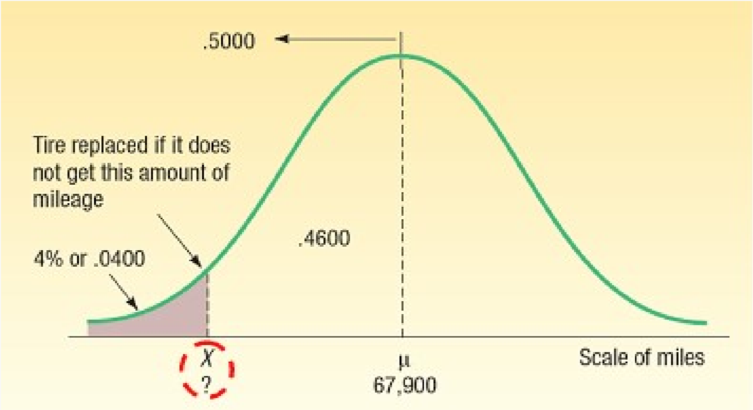
$$z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{\$1,200 - \$1,000}{\$100} = 2.00$$



Η χρήση του Z για την εύρεση της περιοχής X - Παράδειγμα

Η Layton Tire and Rubber Company επιθυμεί να δημιουργήσει μια ελάχιστη χιλιομετρική εγγύηση στα νέα ελαστικά της MX100. Οι δοκιμές αποκαλύπτουν ότι η μέση διάρκεια ζωής είναι 67.900 μίλια με μια τυπική απόκλιση 2.050 μίλια και ότι η κατανομή μιλίων ακολουθεί την κανονική κατανομή πιθανοτήτων. Η Layton θέλει να ορίσει τα ελάχιστα εγγυημένα χιλιόμετρα ώστε να μη χρειάζεται να αντικατασταθούν περισσότερα από το 4% των ελαστικών.

Ποια είναι τα ελάχιστα εγγυημένα χιλιόμετρα που θα πρέπει να ανακοινώσει ο Layton;



Βρείτε το X χρησιμοποιόντας τον τύπο:

$$z = \frac{x\text{-}\mu}{\sigma} = \frac{x - 67,900}{2,050}$$

Η τιμή του z βρίσκεται χρησιμοποιώντας την πληροφορία του 4%.

Η περιοχή μεταξύ του 67,900 και του x είναι 0.46,

το οποίο προκύπτει από το 0.50-0.04

Χρησιμοποιώντας τον Πίνακα της διαφάνειας 10,

η τιμή που είναι πιο κοντά στο 0.4600 είναι το 0.4599,

η οποία αντιστοιχεί σε z = -1.75.

Έπειτα, αντικαταστήστε το στην εξίσωση:

$$-1.75 = \frac{x\text{-}67,900}{2,050}$$, και λύστε για x

$$-1.75(2,050) = x\text{-}67,900$$

$$x = 67,900\text{-}1.75(2,050)$$

$$x = 64,312$$