ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΑΛΓΕΒΡΑ BOOLE

2.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Τα ψηφιακά κυκλώματα λειτουργούν σε δύο καταστάσεις, 0 και 1, όπου τα 0 και 1 αντιστοιχούν σε προκαθορισμένα επίπεδα τάσης. Για το λόγο αυτό, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μία απλοποιημένη άλγεβρα, στην οποία θα εκτελούνται πράξεις με τα δύο αυτά σύμβολα. Τις βάσεις της άλγεβρας αυτής έθεσε ο George Boole στο βιβλίο του [BOOL1854] και για αυτό η άλγεβρα ονομάστηκε **'λγεβρα Boole**. Η άλγεβρα Boole αποτελεί ένα πολύ απλό μαθηματικό εργαλείο, το οποίο μας επιτρέπει να εκφράσουμε τη σχέση ανάμεσα στις εισόδους και εξόδους ενός κυκλώματος με τη βοήθεια μίας εξίσωσης ή λογικής έκφρασης. Επιπλέον, τα θεωρήματα και τα αξιώματα της άλγεβρας Boole μας επιτρέπουν, ως ένα βαθμό, να απλοποιήσουμε τις λογικές εκφράσεις που περιγράφουν τη λειτουργία ενός κυκλώματος. Ωστόσο, υπάρχουν άλλες τεχνικές οι οποίες εξυπηρετούν καλύτερα το συγκεκριμένο σκοπό. Οι τεχνικές αυτές περιγράφονται στο Κεφάλαιο 4.

Η άλγεβρα Boole είναι μία αλγεβρική δομή που ορίζεται από ένα σύνολο τελεστών, ένα σύνολο στοιχείων, και ένα σύνολο αξιωμάτων. Ένα **σύνολο** είναι μία ομάδα από στοιχεία, τα οποία εμφανίζουν κοινές ιδιότητες. Παράδειγμα συνόλου αποτελεί το σύνολο των φυσικών αριθμών N={1, 2, 3, 4, 5....}. Με τον όρο **τελεστής** εννοούμε τον κανόνα με τον οποίο ένα ζεύγος στοιχείων ενός συνόλου, αντιστοιχίζεται σε ένα στοιχείο του ίδιου συνόλου. Για παράδειγμα, ο τελεστής (+) αντιστοιχίζει το ζεύγος αριθμών 1 και 4 του συνόλου των φυσικών αριθμών με τον αριθμό 5, ο οποίος επίσης είναι μέλος του ίδιου συνόλου. Τα αξιώματα είναι προτάσεις τις οποίες δεχόμαστε χωρίς απόδειξη. Βάσει των προτάσεων αυτών, παράγονται άλλες προτάσεις και θεωρήματα της αλγεβρικής δομής. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, ορισμένα από τα αξιώματα της άλγεβρας Boole είναι διαφορετικά από την άλγεβρα των πραγματικών αριθμών με την οποία είναι εξοικειωμένος ο αναγνώστης.

Στο υπόλοιπο αυτού του κεφαλαίου, θα ορίσουμε αρχικά την άλγεβρα Boole, δηλαδή την άλγεβρα Boole η οποία ορίζεται πάνω σε ένα σύνολο S αποτελούμενο από τα στοιχεία 0 και 1. Η άλγεβρα Boole είναι αυτή που μας ενδιαφέρει για την ανάλυση και σχεδίαση των λογικών κυκλωμάτων. Ειδικότερα, θα ορίσουμε τους τελεστές της άλγεβρας Boole και θα παρουσιάσουμε τα αξιώματα που ισχύουν σε αυτή. Έπειτα, θα παρουσιάσουμε και θα αποδείξουμε τα βασικά θεωρήματα της άλγεβρας Boole χρησιμοποιώντας τα αξιώματα, αλλά και ένα εργαλείο, το οποίο ονομάζεται **πίνακας αληθείας** (truth table). Στη συνέχεια, θα ορίσουμε το σύνολο των λογικών πράξεων της άλγεβρας Boole, ενώ στο τελευταίο μέρος του κεφαλαίου θα περιγράψουμε τον τρόπο με τον οποίο αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση των λογικών εκφράσεων που περιγράφουν τη λειτουργία των κυκλωμάτων.

2.2 Η ΑΛΓΕΒΡΑ BOOLE

Η άλγεβρα Boole ορίζεται πάνω σε ένα σύνολο A αποτελούμενο από δύο στοιχεία $(0, 1)$ και τρεις τελεστές, (+), $(\cdot)$ και $(')$:

$$A = \{(0,1),\ +\ ,\ \cdot\ ,'\}$$

Οι τρεις τελεστές της άλγεβρας Boole, (+), $(\cdot)$, και $(')$, ακολουθούν τους εξής κανόνες λειτουργίας[1]:

1. *Ο τελεστής* $(+)$ *ή λογικό Ή*: Το λογικό Ή ανάμεσα σε δύο στοιχεία του συνόλου S δίνει αποτέλεσμα εντός του συνόλου S, το οποίο ισούται με 0, αν τα δύο στοιχεία είναι ίσα με 0 και 1, αν τουλάχιστον ένα από τα δύο στοιχεία είναι ίσο με 1.
2. *Ο τελεστής* $(\cdot)$ *ή λογικό ΚΑΙ*: Το λογικό ΚΑΙ ανάμεσα σε δύο στοιχεία του συνόλου S δίνει αποτέλεσμα εντός του συνόλου S, το οποίο ισούται με 0, αν τουλάχιστον ένα από τα δύο στοιχεία είναι ίσο με 0 και 1, αν και τα δύο στοιχεία είναι ίσα με 1.
3. *Ο μοναδιαίος τελεστής* $(')$ *ή συμπλήρωμα*: Για κάθε στοιχείο $x \in \{0,\ 1\}$, το συμπλήρωμά του, $\overline{x}$, ορίζεται ως ακολούθως:

   - Αν $x = 1$, τότε $\overline{x} = 0$,.

[1] Οι τελεστές αυτοί έχουν διαφορετικά σύμβολα στη μαθηματική λογική. Ο τελεστής + συμβολίζεται με το $\vee$ ενώ ο τελεστής $\cdot$ συμβολίζεται με το $\wedge$, ή τίποτα. Το συμπλήρωμα ενός στοιχείου x συμβολίζεται είτε με το $(')$ είτε με με άνω παύλα $^{-}$. Ο συμβολισμός της άνω παύλας είναι αυτός που κυρίως θα ακολουθηθεί στο υπόλοιπο αυτού του βιβλίου.

- Αν $x = 0$, τότε $\overline{x} = 1$

Οι κανόνες που διέπουν τη λειτουργία των δύο τελεστών, μπορούν να περιγραφούν και με χρήση **πινάκων αληθείας**. Ο πίνακας αληθείας είναι μία αναπαράσταση της σχέσης ανάμεσα στις εισόδους και τις εξόδους ενός συστήματος, σε μορφή πίνακα. Με βάση την περιγραφή των κανόνων λειτουργίας των τριών τελεστών που προηγήθηκε, οι πίνακες αληθείας θα έχουν την ακόλουθη μορφή:

x	y	$x+y$	$x \cdot y$	$\overline{x}$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	0

Έχοντας προσδιορίσει το σύνολο πάνω στο οποίο ορίζεται η άλγεβρα Boole, τους τελεστές της αλλά και τους κανόνες που διέπουν τη λειτουργία αυτών, μπορούμε να παρουσιάσουμε τα αξιώματα, την προτεραιότητα των τελεστών κατά την εκτέλεση των πράξεων, αλλά και τα βασικά θεωρήματά της.

2.2.1 ΑΞΙΩΜΑΤΑ

Η άλγεβρα Boole περιλαμβάνει τα παρακάτω αξιώματα:

1. *Κλειστότητα ως προς τους τελεστές*: Είναι φανερό ότι το σύνολο $\{0, 1\}$ είναι κλειστό ως προς τους τελεστές (+) και $(\cdot)$, και $(')$, δεδομένου ότι το αποτέλεσμα κάθε πράξης ανάμεσα σε οποιοδήποτε ζεύγος στοιχείων που ανήκουν στο $\{0, 1\}$, είναι ίσο με 0 ή 1, δηλαδή ανήκει στο S.
2. *Αντιμεταθετική ιδιότητα*: Η διάταξη των στοιχείων κατά την εφαρμογή του κανόνα που ορίζει ο κάθε τελεστής δεν παίζει κανένα ρόλο. Από τους πίνακες αληθείας που παρουσιάστηκαν παραπάνω, παρατηρείστε ότι 0+1=1+0=1 και $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$.
3. *Προσεταιριστική ιδιότητα*: Η προσεταιριστικότητα των τελεστών (+) και $(\cdot)$ μπορεί να αποδειχθεί με τη βοήθεια πινάκων αληθείας. Ειδικότερα, επιθυμούμε να δείξουμε ότι $(x + y) + z = x + (y + z)$ και $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$:

x	y	z	$(x+y)$	$(y+z)$	$(x+y)+z$	$x+(y+z)$	$(x \cdot y)$	$(y \cdot z)$	$(x \cdot y) \cdot z$	$x \cdot (y \cdot z)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

4. *Επιμεριστική ιδιότητα:* Η επιμεριστική ιδιότητα των τελεστών (+) και $(\cdot)$ μπορεί να αποδειχθεί με τη βοήθεια πινάκων αληθείας. Ειδικότερα, επιθυμούμε να δείξουμε ότι ισχύει τόσο ο επιμερισμός του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση $(x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z))$, όσο και ο επιμερισμός της πρόσθεσης ως προς τον πολλαπλασιασμό $(x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z))$:

x	y	z	$(x \cdot y)$	$(x \cdot z)$	$(y+z)$	$x \cdot (y+z)$	$(x \cdot y) + (x \cdot z)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

x	y	z	$(x+y)$	$(x+z)$	$(y \cdot z)$	$x+(y \cdot z)$	$(x+y)\cdot(x+z)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

5. *Ουδέτερο στοιχείο*: Από τον πίνακα αληθείας του τελεστή (+) είναι φανερό ότι 0+0=0, 0+1=1 και 1+0=1. Με άλλα λόγια, $x + 0 = 0 + x = x$. Επομένως, το 0 είναι το ουδέτερο στοιχείο της πράξης λογικό Ή. Ομοίως, από τον πίνακα αληθείας του τελεστή $(\cdot)$, είναι φανερό ότι $1 \cdot 1 = 1$, $0 \cdot 1 = 0$, και $1 \cdot 0 = 0$. Με άλλα λόγια, $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$. Επομένως, το 1 είναι το ουδέτερο στοιχείο της πράξης λογικό ΚΑΙ.
6. *Συμπλήρωμα:* Από τον ορισμό του συμπληρώματος, προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned} x + \overline{x} &= 1 \\ x \cdot \overline{x} &= 0 \end{aligned}$$

Η πρώτη σχέση αποδεικνύεται αν εκτελέσουμε κάθε πράξη λογικού Ή ανάμεσα σε συμπληρωματικές τιμές, $0 + \overline{0} = 0 + 1 = 1$ και $1 + \overline{1} = 1 + 0 = 1$. Ομοίως, η δεύτερη σχέση αποδεικνύεται αν εκτελέσουμε κάθε πράξη λογικού ΚΑΙ ανάμεσα σε συμπληρωματικές τιμές, $0 \cdot \overline{0} = 0 \cdot 1 = 0$ και $1 \cdot \overline{1} = 1 \cdot 0 = 0$.

Η άλγεβρα Boole διαφέρει σε ορισμένα σημεία από τη συνηθισμένη άλγεβρα των πραγματικών αριθμών. Τα σημεία στα οποία επικεντρώνονται οι βασικές διαφορές είναι τα ακόλουθα:

1. Η επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση ισχύει και στη συνηθισμένη άλγεβρα των πραγματικών αριθμών. Όμως, η επιμεριστική ιδιότητα της πρόσθεσης ως προς τον πολλαπλασιασμό ισχύει μόνον στην άλγεβρα Boole και όχι στην άλγεβρα των πραγματικών αριθμών. Η επαλήθευση αυτού του ισχυρισμού είναι πολύ απλή.
2. Στην άλγεβρα Boole δεν ορίζονται οι πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης.
3. Η άλγεβρα Boole ορίζεται σε ένα πεπερασμένο σύνολο 2 τιμών, ενώ η συνηθισμένη άλγεβρα ορίζεται σε ένα σύνολο άπειρων στοιχείων (το σύνολο $\Re$ των πραγματικών αριθμών).
4. Στη συνηθισμένη άλγεβρα δεν υπάρχουν συμπληρώματα.

Στον Πίνακα 2.1 παρατίθενται συνοπτικά τα αξιώματα της άλγεβρας Boole. Τα αξιώματα αυτά αποτελούν τη βάση για την απόδειξη των θεωρημάτων και άλλων ιδιοτήτων της άλγεβρας Boole. Δίπλα από κάθε έκφραση, υπάρχει ένας αριθμός με τον οποίο θα αναφερόμαστε σε καθένα από τα αξιώματα στη συνέχεια του κεφαλαίου.

Πίνακας 2.1: Αξιώματα της άλγεβρας Boole

Α/Α	**Ονομασία**	**Τελεστής (+)**	**Τελεστής $(\cdot)$**
1	Αντιμεταθετική ιδιότητα	(1α) $x + y = y + x$	(1β) $x \cdot y = y \cdot x$
2	Προσεταιριστική ιδιότητα	(2α) $x + (y + z) = x + (y + z)$	(2β) $x \cdot (y \cdot z) = x \cdot (y \cdot z)$
3	Επιμεριστική ιδιότητα	(3α) $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$	(3β) $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$
4	Ουδέτερο στοιχείο	(4α) $x + 0 = x$	(4β) $x \cdot 1 = x$
5	Συμπλήρωμα	(5α) $x + \overline{x} = 1$	(5β) $x \cdot \overline{x} = 0$

2.2.2 ΠΡΟΤΕΡΑΙΟΤΗΤΑ ΤΕΛΕΣΤΩΝ

Όπως σε κάθε αλγεβρική δομή, έτσι και στην άλγεβρα Boole, ορίζεται μία προτεραιότητα των τελεστών, προκειμένου να εξυπηρετηθεί ο υπολογισμός των λογικών εκφράσεων. Αν εξαιρεθούν οι πράξεις με τα συμπληρώματα (τα οποία δεν υπάρχουν στην κοινή άλγεβρα), η προτεραιότητα των τελεστών της άλγεβρας Boole είναι παρόμοια με εκείνη που ορίζεται στην κοινή άλγεβρα. Πιο συγκεκριμένα, η σειρά με την οποία εκτελούνται οι πράξεις της άλγεβρας Boole είναι η εξής:

1. Υπολογισμός των εκφράσεων εντός παρενθέσεων
2. Υπολογισμός των συμπληρωμάτων
3. Υπολογισμός των πράξεων ΚΑΙ
4. Υπολογισμός των πράξεων Ή

Για παράδειγμα, η έκφραση $F = \overline{(0+1)} \cdot 0 \cdot 1 + \overline{1}$ υπολογίζεται διαδοχικά ως εξής:

$$
\begin{aligned}
F &= \overline{(0+1)} \cdot 0 \cdot 1 + \overline{1} \\
&= \overline{1} \cdot 0 \cdot 1 + \overline{1} && \text{(υπολογισμός της έκφρασης εντός της παρένθεσης)} \\
&= 0 \cdot 0 \cdot 1 + 0 && \text{(υπολογισμός των δύο συμπληρωμάτων)} \\
&= 0 + 0 && \text{(υπολογισμός του λογικού ΚΑΙ)} \\
&= 0 && \text{(υπολογισμός του λογικού Ή)}
\end{aligned}
$$

2.3 ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ BOOLE

Στην Παράγραφο 2.2.1 παρουσιάστηκαν τα αξιώματα της άλγεβρας άλγεβρας Boole. Τα αξιώματα αυτά χρησιμοποιούνται προκειμένου να αποδειχθούν τα θεωρήματα της άλγεβρας Boole. Πριν προχωρήσουμε στην αναλυτική παρουσίαση και απόδειξη των θεωρημάτων, είναι χρήσιμο να αναφέρουμε την έννοια του **δυϊσμού**.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1
Ο δυϊσμός είναι μία ιδιότητα της άλγεβρας Boole σύμφωνα με την οποία, οποιαδήποτε αλγεβρική έκφραση της άλγεβρας Boole εξακολουθεί να ισχύει αν αλλάξουμε κάθε τελεστή (+) σε (·) και το αντίστροφο, κάθε 0 σε 1, και κάθε 1 σε 0.

Ρίχνοντας μία ματιά στον Πίνακα 2.1, παρατηρούμε ότι σε κάθε ζεύγος αξιωμάτων, το τμήμα (α) αποτελεί το **δυϊκό** του (β) και αντίστροφα, δηλαδή κάθε τμήμα παράγεται από το άλλο αν αλλάξουμε τους τελεστές και τα στοιχεία 0 και 1 σύμφωνα με τον Ορισμό 2.1. Ο δυϊσμός έχει πολλές εφαρμογές στα ψηφιακά συστήματα. Στην Ενότητα αυτή θα τον χρησιμοποιήσουμε για ορισμένες από τις αποδείξεις των θεωρημάτων της άλγεβρας Boole. Στη συνέχεια του κεφαλαίου, θα χρησιμοποιηθεί για την εύρεση του συμπληρώματος μίας λογικής έκφρασης. Τα βασικά θεωρήματα της άλγεβρας Boole είναι τα ακόλουθα:

1. Πράξεις μεταβλητής με τον εαυτό της
2. Πράξεις μεταβλητής με σταθερά
3. Θεώρημα διπλής άρνησης
4. Θεώρημα De Morgan
5. Θεώρημα απορρόφησης

Για καθένα από αυτά τα θεωρήματα, υπάρχουν δύο αλγεβρικές εκφράσεις, εκ των οποίων η μία αποτελεί τη δυϊκή της άλλης.

Θεώρημα 1: Πράξεις Μεταβλητής με τον Εαυτό της Δεδομένου ότι ορίζονται δύο βασικές πράξεις της άλγεβρας Boole, (+) και (·), οι πράξεις μίας μεταβλητής x με τον εαυτό της θα είναι:

1. $x + x$
2. $x \cdot x$

Αποδεικνύεται ότι οι δύο παραπάνω πράξεις δίνουν αποτέλεσμα x. Αρχικά, θα αποδείξουμε ότι $x + x = x$ και στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την αρχή του δυϊσμού θα αποδείξουμε ότι $x \cdot x = x$. Σε κάθε βήμα της απόδειξης, αναφέρεται και το αντίστοιχο αξίωμα που χρησιμοποιείται.

$$\begin{aligned} x + x &= (x + x) \cdot 1 && \text{(ουδέτερο στοιχείο, 4(β))} \\ &= (x + x)(x + \overline{x}) && \text{(συμπλήρωμα, 5(α))} \\ &= x + x\,\overline{x} && \text{(επιμεριστική, 3(β))} \\ &= x + 0 && \text{(συμπλήρωμα, 5(β))} \\ &= x && \text{(ουδέτερο στοιχείο, 4(α))} \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την αρχή του δυϊσμού, μπορούμε να αποδείξουμε ότι $x \cdot x = x$. Τα βήματα της απόδειξης που ακολουθεί είναι τα δυϊκά των αξιωμάτων που χρησιμοποιήθηκαν στην απόδειξη της έκφρασης $x + x = x$.

$$\begin{aligned} x \cdot x &= (x\,x) + 0 && \text{(ουδέτερο στοιχείο, 4(α))} \\ &= (x\,x) + (x\,\overline{x}) && \text{(συμπλήρωμα, 5(β))} \\ &= x\,(x + \overline{x}) && \text{(επιμεριστική, 3(α))} \\ &= x \cdot 1 && \text{(συμπλήρωμα, 5(α))} \\ &= x && \text{(ουδέτερο στοιχείο, 4(β))} \end{aligned}$$

Ο αναγνώστης που πιθανόν δεν είναι εξοικειωμένος με αποδείξεις αυτής της μορφής, είναι πιθανό να έχει στο μυαλό του την εξής ερώτηση: "Από πού θα πρέπει να ξεκινήσω, για να καταλήξω σε αυτή την απόδειξη;" Απάντηση σε αυτή την ερώτηση δεν υπάρχει! Στη συγκεκριμένη περίπτωση, έχουμε στη διάθεσή μας ένα σύνολο από αξιώματα και πρέπει να τα χρησιμοποιήσουμε για να φέρουμε κάθε αλγεβρική έκφραση σε μία μορφή, της οποίας το αποτέλεσμα αποτελεί επίσης αξίωμα. Στις παραπάνω αποδείξεις, οι τελικές μορφές στις οποίες καταλήξαμε ήταν τα αξιώματα που αφορούν το ουδέτερο στοιχείο των πράξεων που ορίζουν οι τελεστές (+) και (·). Γενικά, η χρήση της άλγεβρας Boole δεν είναι πάντοτε ιδιαίτερα βολική, τόσο για την απόδειξη θεωρημάτων, όσο και για την απλοποίηση λογικών εκφράσεων, όπως θα δούμε σε επόμενη ενότητα. Για την απλοποίηση λογικών εκφράσεων, υπάρχουν άλλες τεχνικές, αρκετά πιο εύχρηστες. Για τις αποδείξεις θεωρημάτων, ο αναγνώστης μπορεί να κάνει χρήση των πινάκων αληθείας. Για παράδειγμα, οι σχέσεις $x + x = x$ και $x \cdot x = x$, μπορούν να αποδειχθούν πολύ πιο εύκολα αν κατασκευάσουμε τους δύο παρακάτω πίνακες αληθείας, δεδομένου ότι έχουμε ήδη ορίσει τα αποτελέσματα των πράξεων (+) και (·) ανάμεσα στις σταθερές 0 και 1.

x	$x + x$	$x \cdot x$
0	0	0
1	1	1

Θεώρημα 2: Πράξεις Μεταβλητής με Σταθερά Στο αξίωμα 4, αναφέρεται ότι το 0 είναι το ουδέτερο στοιχείο ως προς την πράξη Ή, ενώ το 1 είναι το ουδέτερο στοιχείο ως προς την πράξη ΚΑΙ. Στο θεώρημα αυτό, εξετάζεται το αποτέλεσμα που δίνει κάθε πράξη μίας μεταβλητής x με τη σταθερά που δεν αποτελεί ουδέτερο στοιχείο της πράξης. Οι πράξεις αυτές είναι:

1. $x + 1$
2. $x \cdot 0$

Αποδεικνύεται ότι το αποτέλεσμα αυτών των πράξεων είναι ίσο με τη σταθερά, δηλαδή 1 για την πρώτη πράξη και 0 για τη δεύτερη. Ειδικότερα,

$$\begin{aligned}
x+1 &= 1\cdot(x+1) && \text{(ουδέτερο στοιχείο, 4(β))}\\
&= (x+\overline{x})(x+1) && \text{(συμπλήρωμα, 5(α))}\\
&= x+\overline{x}\cdot 1 && \text{(επιμεριστική, 3(β))}\\
&= x+\overline{x} && \text{(ουδέτερο στοιχείο, 4(β))}\\
&= 1 && \text{(συμπλήρωμα, 5(α))}
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την αρχή του δυϊσμού, έχουμε

$$\begin{aligned}
x\cdot 0 &= 0+(x\cdot 0) && \text{(ουδέτερο στοιχείο, 4(α))}\\
&= (x\,\overline{x})+(x\cdot 0) && \text{(συμπλήρωμα, 5(β))}\\
&= x\cdot(\overline{x}+0) && \text{(επιμεριστική, 3(α))}\\
&= x\,\overline{x} && \text{(ουδέτερο στοιχείο, 4(α))}\\
&= 0 && \text{(συμπλήρωμα, 5(β))}
\end{aligned}$$

Τα παραπάνω αποτελέσματα μπορούν εύκολα να αποδειχθούν και με έναν απλό πίνακα αληθείας:

x	$x+1$	$x\cdot 0$
0	1	0
1	1	0

Θεώρημα 3: Διπλή ’ρνηση Το θεώρημα διπλής άρνησης δείχνει ότι το συμπλήρωμα του συμπληρώματος μίας μεταβλητής x είναι το ίδιο το x, δηλαδή $\overline{(\overline{x})} = x$. Για να αποδείξουμε την παραπάνω πρόταση, θα πρέπει να βρούμε το συμπλήρωμα του $\overline{x}$, δηλαδή το $\overline{(\overline{x})}$. Όμως, από τις εκφράσεις του Αξιώματος 5 (συμπλήρωμα), $x+\overline{x} = 1$ και $x\,\overline{x} = 0$, προκύπτει ότι το συμπλήρωμα του $\overline{x}$ είναι ίσο με x. ’ρα $\overline{(\overline{x})} = x$. Επίσης, μπορούμε να αποδείξουμε το θεώρημα διπλής άρνησης με έναν πίνακα αληθείας. Οι πρώτη και η τρίτη στήλη που περιέχουν τις τιμές των x και $\overline{(\overline{x})}$ είναι ίδιες.

x	$\overline{x}$	$\overline{(\overline{x})}$
0	1	0
1	0	1

Θεώρημα 4: Θεώρημα De MorganΤο θεώρημα De Morgan δηλώνει ότι το συμπλήρωμα του αποτελέσματος μίας λογικής πράξης ανάμεσα σε δύο μεταβλητές λαμβάνεται αν συμπληρώσουμε κάθε μεταβλητή και αλλάξουμε τον τελεστή από $(+)$ σε $(\cdot)$ ή από $(\cdot)$ σε $(+)$. Δηλαδή,

1. $\overline{(x+y)} = \overline{x}\,\overline{y}$
2. $\overline{x\,y} = \overline{x}+\overline{y}$

Οι αποδείξεις των παραπάνω σχέσεων με χρήση αλγεβρικών προτάσεων είναι αρκετά πολύπλοκη. Ωστόσο, μπορούμε να αποδείξουμε τις σχέσεις αυτές με δύο πίνακες αληθείας:

x	y	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$(x+y)$	$\overline{(x+y)}$	$\overline{x}\,\overline{y}$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0

x	y	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$(x\,y)$	$\overline{(x\,y)}$	$\overline{x}+\overline{y}$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0

Το θεώρημα De Morgan γενικεύεται και για πράξεις με μεγαλύτερο πλήθος μεταβλητών. Ως παράδειγμα, ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στην ’σκηση 2.4.

Θεώρημα 5: Απορρόφηση Το θεώρημα της απορρόφησης δηλώνει ότι αν λάβουμε το λογικό Ή ανάμεσα σε μία μεταβλητή x και στο αποτέλεσμα που προκύπτει από την λογική πράξη ΚΑΙ του x με μία μεταβλητή y, τότε το αποτέλεσμα του λογικού ΚΑΙ “απορροφάται”. Αντίστοιχα, αν λάβουμε το λογικό ΚΑΙ ανάμεσα σε μία μεταβλητή x και στο αποτέλεσμα που προκύπτει από την λογική πράξη Ή του x με μία μεταβλητή y, τότε το αποτέλεσμα του λογικού Ή επίσης “απορροφάται”. Αλγεβρικά,

1. $x + x\,y = x$
2. $x(x + y) = x$
3. $x + \overline{x}\,y = x + y$
4. $x(\overline{x} + y) = x\,y$

Οι παραπάνω προτάσεις αποδεικνύονται εύκολα με χρήση των αξιωμάτων της άλγεβρας Boole και του Θεωρήματος 2 που αποδείχθηκε προηγουμένως. Ειδικότερα, για την 1,

$$\begin{aligned} x + xy &= x \cdot 1 + xy && \text{(ουδέτερο στοιχείο, 4(β))} \\ &= x(1 + y) && \text{(επιμεριστική ιδιότητα, 3(α))} \\ &= x \cdot 1 && \text{(Θεώρημα 2)} \\ &= x && \text{(ουδέτερο στοιχείο, 4(β))} \end{aligned}$$

Για την 2, χρησιμοποιώντας την αρχή του δυϊσμού,

$$\begin{aligned} x(x + y) &= (x + 0)(x + y) && \text{(ουδέτερο στοιχείο, 4(α))} \\ &= x + 0 \cdot y && \text{(επιμεριστική ιδιότητα, 3(β))} \\ &= x + 0 && \text{(Θεώρημα 2)} \\ &= x && \text{(ουδέτερο στοιχείο, 4(α))} \end{aligned}$$

Για την 3,

$$\begin{aligned} x + \overline{x}\,y &= x(y + \overline{y}) + \overline{x}\,y(x + \overline{x}) && \text{(συμπλήρωμα, 5(α))} \\ &= xy + x\overline{y} + \overline{x}\,yx + \overline{x}y\overline{x} && \text{(επιμεριστική ιδιότητα, 3(α))} \\ &= xy + x\overline{y} + \overline{x}y && \text{(Συμπλήρωμα 5(β), Θεώρημα 1)} \\ &= xy + xy + x\overline{y} + \overline{x}y && \text{(Θεώρημα 1)} \\ &= x(y + \overline{y}) + y(x + \overline{x}) && \text{(επιμεριστική ιδιότητα, 3(α))} \\ &= x \cdot 1 + y \cdot 1 && \text{(συμπλήρωμα, 5(α))} \\ &= x + y && \text{(ουδέτερο στοιχείο, 4(β))} \end{aligned}$$

Για την 4, χρησιμοποιώντας την αρχή του δυϊσμού,

$$\begin{aligned} x(\overline{x} + y) &= [x + (y\,\overline{y})] \cdot [(\overline{x} + y) + (x\,\overline{x})] && \text{(συμπλήρωμα, 5(β))} \\ &= [(x + y)(x + \overline{y})] \cdot [(\overline{x} + y + x)(\overline{x} + y + \overline{x})] && \text{(επιμεριστική ιδιότητα, 3(β))} \\ &= (x + y)(x + \overline{y})(\overline{x} + y) && \text{(Συμπλήρωμα 5(α), Θεώρημα 1)} \\ &= (x + y)(x + y)(x + \overline{y})(\overline{x} + y) && \text{(Θεώρημα 1)} \\ &= [x \cdot (y + \overline{y})] \cdot [y(x + \overline{x})] && \text{(επιμεριστική ιδιότητα 3(β))} \\ &= (x \cdot 1) \cdot (y \cdot 1) && \text{(συμπλήρωμα 5(α))} \\ &= xy && \text{(ουδέτερο στοιχείο, 4(β))} \end{aligned}$$

Ορισμένες ακόμη προτάσεις του Θεωρήματος της απορρόφησης είναι οι ακόλουθες:

5. $xy + \overline{x}\,z + yz = xy + \overline{x}\,z$. Η απόδειξη της περίπτωσης αυτής αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη (’σκηση 2.1). Φυσικά, ισχύει και το δυϊκό.
6. $x + f(x, y, ...z) = x + f(0, y, ...z)$
7. $x \cdot f(x, y, ...z) = x \cdot f(1, y, ...z)$

8. $f(x, y, ...z) = x \cdot f(1, y, ...z) + \overline{x} \cdot f(0, y, ...z)$
9. $f(x, y, ...z) = (x + f(0, y, ...z)) \cdot (\overline{x} + f(1, y, ...z))$

Οι περιπτώσεις 6 και 7 είναι γενίκευση των περιπτώσεων 1 και 2. Οι περιπτώσεις 8 και 9 είναι γενίκευση των περιπτώσεων 3 και 4. Η απόδειξη των περιπτώσεων αυτών αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

Στον Πίνακα 2.2 συνοψίζονται τα βασικά θεωρήματα της άλγεβρας Boole που παρουσιάστηκαν παραπάνω

Πίνακας 2.2: Θεωρήματα της άλγεβρας Boole

Α/Α	**Ονομασία**	**Τελεστής (+)**	**Τελεστής $(\cdot)$**
1	Πράξεις μεταβλητής με τον εαυτό της	(1α) $x + x = x$	(1β) $x \cdot y = x$
2	Πράξεις μεταβλητής με σταθερά	(2α) $x + 1 = 1$	(2β) $x \cdot 0 = 0$
3	Διπλή άρνηση	(3) $\overline{(\overline{x})} = x$	
4	De Morgan	(4α) $\overline{(x + y)} = \overline{x}\,\overline{y}$	(4β) $\overline{x\,y} = \overline{x} + \overline{y}$
5	Απορρόφηση	(5α) $x + x\,y = x$	(5β) $x(x + y) = x$

2.4 ΛΟΓΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ονομάζουμε **λογική συνάρτηση** ή **συνάρτηση Boole**, μία οποιαδήποτε λογική έκφραση πλήθους n μεταβλητών, η οποία μπορεί να περιέχει έναν ή και τους δύο βασικούς τελεστές της άλγεβρας Boole, (+) και $(\cdot)$, το συμπλήρωμα (ΌΧΙ), παρενθέσεις και αγκύλες. Σε περίπτωση που $n = 0$, τότε η συνάρτηση είναι είτε ουδέτερη (σταθερό 0), είτε ταυτοτική (σταθερό 1). Αν $n = 1$, η συνάρτηση είναι είτε μεταφορά $F = x$, είτε συμπλήρωμα $F = \overline{x}$ (βλ. Παράγραφο 2.5). Για παράδειγμα, η

$$F_1 = x\,y + x\,\overline{y}\,\overline{z}$$

είναι μία συνάρτηση με $n = 3$ μεταβλητές, οι οποία περιέχει τους τελεστές (+) και $(\cdot)$ (ο τελεστής της λογικής πράξης ΚΑΙ συχνά παραλείπεται μέσα στις εκφράσεις, όπως συμβαίνει στο συνηθισμένο αλγεβρικό πολλαπλασιασμό) και την άρνηση.

Αν προσπαθήσει κανείς να περιγράψει λεκτικά τη συμπεριφορά της παραπάνω συνάρτησης, τότε θα πρέπει να πει ότι "η F_1 δίνει αποτέλεσμα 1 όταν $x\,y = 1$ ή όταν $x\,\overline{y}\,\overline{z}$". Από την περιγραφή αυτή, είναι φανερό ότι η συνάρτηση F_1 εκφράζεται από το λογικό Ή δύο "όρων γινομένου".[2] Όπως έχει αναφερθεί ήδη, η συνάρτηση Ή δίνει 1, αν ένας έστω όρος είναι ίσος με 1. Αν προσπαθήσουμε να αναλύσουμε περαιτέρω τον κάθε όρο γινομένου ξεχωριστά, θα λέγαμε ότι, "ο όρος $x\,y$ γίνεται 1 μόνον όταν $x = y = 1$, ενώ ο όρος $x\,\overline{y}\,\overline{z}$ γίνεται 1 μόνον όταν $x = 1$ ΚΑΙ $y = 0$ ΚΑΙ $z = 0$". Αν προσπαθήσουμε να συνοψίσουμε τη λεκτική ανάλυση της F_1, τότε θα λέγαμε ότι: "Η F_1 δίνει αποτέλεσμα 1, όταν ($x = 1$ ΚΑΙ $y = 1$, ανεξάρτητα από την τιμή του z) Ή ($x = 1$ ΚΑΙ $y = 0$ ΚΑΙ $z = 0$)".

Με βάση τα παραπάνω, μπορούμε να κατασκευάσουμε τον πίνακα αληθείας της F_1. Ο πίνακας αληθείας δείχνει την τιμή της συνάρτησης για κάθε δυνατό συνδυασμό των τιμών των μεταβλητών της. Για n μεταβλητές, το πλήθος των συνδυασμών είναι 2^n. Οι συνδυασμοί προκύπτουν αν γράψουμε τους δυαδικούς αριθμούς από 0 ως 2^{n-1} και αντιστοιχίσουμε κάθε bit σε μία μεταβλητή. Επομένως, για

[2] Ο χρήση του όρου "γινόμενο" μοιάζει κάπως αδόκιμη, δεδομένου ότι δεν πρόκειται για πολλαπλασιασμό, αλλά για την πράξη λογικό ΚΑΙ. Ωστόσο, έχει επικρατήσει το λογικό ΚΑΙ ανάμεσα σε ένα πλήθος μεταβλητών να αναφέρεται ως γινόμενο, επειδή το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού ανάμεσα σε οποιοδήποτε συνδυασμό των τιμών 0 και 1 είναι ίδιο με το αποτέλεσμα της λογικής πράξης ΚΑΙ. Επίσης, η λογική πράξη Ή έχει επικρατήσει να αναφέρεται ως "άθροισμα" παρά το γεγονός ότι οι δύο πράξεις δεν δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα για κάθε συνδυασμό των τιμών 0 και 1. Πράγματι, το λογικό Ή ανάμεσα σε δύο μονάδες δίνει αποτέλεσμα 1, αλλά η πρόσθεσή τους δίνει αποτέλεσμα 0 (και 1 κρατούμενο), όπως παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 1. Οι όροι άθροισμα και γινόμενο θα χρησιμοποιούνται στη συνέχεια αυτού του βιβλίου, όταν δεν υπάρχει σύγχυση με το αριθμητικό άθροισμα και γινόμενο.

$n = 3$, οι συνδυασμοί τιμών των μεταβλητών θα είναι $2^3 = 8$ (από 000 ως 111). Ο Πίνακας 2.3 απεικονίζει τον πίνακα αληθείας της F_1. Παρατηρείστε ότι είναι φανερή η αντιστοίχιση του πίνακα αληθείας με τη λεκτική περιγραφή που προηγήθηκε. Οι δύο τελευταίες γραμμές του πίνακα αληθείας δείχνουν ότι όταν το x ΚΑΙ το y ισούνται με 1 και το z είναι είτε 0 είτε 1, τότε $F = 1$. Η πέμπτη γραμμή δείχνει ότι όταν $x = 1$ ΚΑΙ $y = 0$ ΚΑΙ $z = 0$, τότε $F_1 = 1$. Σε κάθε άλλη περίπτωση, $F_1 = 0$.

Πίνακας 2.3: Πίνακας αληθείας της $F_1 = x\,y + x\,\overline{y}\,\overline{z}$

x	y	z	F_1
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Για κάθε συνάρτηση της οποίας γνωρίζουμε τη λογική έκφραση ή έστω μία λεκτική περιγραφή, μπορούμε να κατασκευάσουμε τον πίνακα αληθείας. Π.χ., θεωρείστε τη συνάρτηση F_2 τεσσάρων μεταβλητών a, b, c, d στην κανονική τους (όχι σε συμπληρωματική) μορφή, της οποίας η λεκτική περιγραφή είναι η εξής: "$F_2 = 1$ όταν το γινόμενο τριών από τις τέσσερις μεταβλητές είναι ίσο με 1". Αυτό σημαίνει ότι, η $F_2 = 1$ όταν ($a = 1$ ΚΑΙ $b = 1$ ΚΑΙ $c = 1$ ανεξάρτητα του d), Ή ($a = 1$ ΚΑΙ $b = 1$ ΚΑΙ $d = 1$ ανεξάρτητα του c) Ή ($a = 1$ ΚΑΙ $c = 1$ ΚΑΙ $c = 1$ ανεξάρτητα του b) Ή ($b = 1$ ΚΑΙ $c = 1$ ΚΑΙ $d = 1$ ανεξάρτητα του a). Τελικά, προκύπτει η ακόλουθη λογική έκφραση: $F_2 = a\,b\,c + a\,b\,d + a\,c\,d + b\,c\,d$. Ο Πίνακας 2.4 απεικονίζει τον πίνακα αληθείας της F_2.

Πίνακας 2.4: Πίνακας αληθείας της $F_2 = a\,b\,c + a\,b\,d + a\,c\,d + b\,c\,d$

a	b	c	d	F_2
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Με τέσσερις διαθέσιμες μεταβλητές, υπάρχουν $2^4 = 16$ δυνατοί συνδυασμοί (0000-1111). Παρατηρείστε ότι η τελευταία γραμμή δείχνει ότι η F_1 είναι 1 κάθε φορά που τρεις μεταβλητές είναι ίσες με 1 και μία είναι ίση με 0, αλλά και όταν όλες οι μεταβλητές είναι ίσες με 1. Η αλγεβρική έκφραση μίας συνάρτησης μπορεί να προκύψει τόσο μέσα από τη λεκτική της περιγραφή, όσο και από μία εξέταση του πίνακα αληθείας. Όσον αφορά την εξαγωγή της αλγεβρικής έκφρασης μέσα από μία λεκτική περιγραφή, δεν υπάρχει κάποια συγκεκριμένη μεθοδολογία. Απλώς, η συμπεριφορά της συνάρτησης πρέπει να μεταφραστεί σε λογικές εκφράσεις. Στο παράδειγμα της F_2, γράψαμε όλα τα πιθανά γινόμενα τριών μεταβλητών εκφρασμένων στην κανονική τους μορφή και λάβαμε το άθροισμά τους. Για να εξάγουμε την αλγεβρική έκφραση μίας συνάρτησης F με τη βοήθεια του πίνακα αληθείας, θα πρέπει να ακολουθήσουμε τα εξής βήματα:

1. Βρίσκουμε τους συνδυασμούς μεταβλητών για τους οποίους η F είναι ίση με 1.
2. Εκφράζουμε κάθε συνδυασμό ως γινόμενο, γράφοντας όσες μεταβλητές έχουν τιμή 1 στην κανονική τους μορφή και όσες έχουν τιμή 0 στη συμπληρωματική τους μορφή.
3. Αθροίζουμε τα γινόμενα.

Έστω ότι ονομάζουμε F_3 τη συνάρτηση που εξάγεται από τον Πίνακα 2.3 και F_4 τη συνάρτηση που εξάγεται από τον Πίνακα 2.4. Ακολουθώντας τα παραπάνω βήματα, βρισκόμαστε σε μία μικρή έκπληξη! Οι αλγεβρικές εκφράσεις που προκύπτουν είναι διαφορετικές, δηλαδή $F_1 \neq F_3$ και $F_2 \neq F_4$. Πράγματι, από τον Πίνακα 2.3, οι όροι γινομένων που προκύπτουν είναι $x\,\overline{y}\,\overline{z}$, $x\,y\,\overline{z}$, και $x\,y\,z$. ’ρα,

$$
\begin{aligned}
F_3 &= x\,\overline{y}\,\overline{z} + x\,y\,\overline{z} + x\,y\,z, \qquad \text{ενώ} \\
F_1 &= x\,y + x\,\overline{y}\,\overline{z}
\end{aligned}
$$

Ομοίως, για την F_2, οι οι όροι γινομένων που προκύπτουν από τον Πίνακα 2.4 είναι $\overline{a}\,b\,c\,d$, $a\,\overline{b}\,c\,d$, $a\,b\,\overline{c}\,d$, $a\,b\,c\,\overline{d}$, και $a\,b\,c\,d$.

$$
\begin{aligned}
F_4 &= \overline{a}\,b\,c\,d + a\,\overline{b}\,c\,d + a\,b\,\overline{c}\,d + a\,b\,c\,\overline{d} + a\,b\,c\,d \qquad \text{ενώ} \\
F_2 &= a\,b\,c + a\,b\,d + a\,c\,d + b\,c\,d
\end{aligned}
$$

Από τα παραπάνω, είναι φανερό ότι ή έχει συμβεί κάποιο λάθος ή μία λογική συνάρτηση μπορεί να εκφραστεί με πολλούς τρόπους. Για καλή μας τύχει, ισχύει το δεύτερο: *για κάθε λογική συνάρτηση υπάρχουν πολλές εκφράσεις.* Αυτό σημαίνει ότι οι πίνακες αληθείας των εκφράσεων F_1 και F_3 είναι ίδιοι μεταξύ τους, όπως και οι πίνακες αληθείας των F_2 και F_4. Από τα παραπάνω, προκύπτουν ορισμένα σημαντικά ερωτήματα:

1. Μπορούμε από την αλγεβρική έκφραση μίας συνάρτησης να μεταβούμε σε μία άλλη ισοδύναμη;
2. Από το σύνολο των εκφράσεων μίας λογικής συνάρτησης, ποιά είναι η προτιμότερη για υλοποίηση σε ένα ψηφιακό σύστημα;

Οι απαντήσεις στα δύο αυτά ερωτήματα σχετίζονται μεταξύ τους. Η επόμενη παράγραφος επιδιώκει να κάνει μία πρώτη προσέγγιση σε αυτά τα ερωτήματα.

2.4.1 ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΛΟΓΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Γενικά, χρησιμοποιώντας τα θεωρήματα και τα αξιώματα της άλγεβρας Boole μπορούμε να μετασχηματίσουμε τη λογική έκφραση μίας συνάρτησης σε μία άλλη έκφραση πιο “απλή”. Με τον όρο πιο απλή, εννοούμε μία έκφραση η οποία περιέχει μικρότερο πλήθος από γινόμενα και/ή γινόμενα με μικρότερο πλήθος μεταβλητών. Με αυτό το σκεπτικό, για κάθε λογική συνάρτηση F υπάρχει μία **ελαχιστοποιημένη έκφραση**, η οποία περιέχει το ελάχιστο πλήθος γινομένων και το ελάχιστο πλήθος μεταβλητών ανά γινόμενο. Η συνάρτηση της οποίας η έκφραση είναι ελαχιστοποιημένη, ονομάζεται **ελαχιστοποιημένη συνάρτηση**. Απαντώντας στο δεύτερο ερώτημα που τέθηκε, με δεδομένο ότι οι λογικές εκφράσεις υλοποιούνται με τη βοήθεια ψηφιακών πυλών, είναι προφανές ότι μία ελαχιστοποιημένη έκφραση θα αντιστοιχεί σε ένα “ελαχιστοποιημένο κύκλωμα”. Όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 4, ένα ελαχιστοποιημένο κύκλωμα περιέχει το ελάχιστο πλήθος πυλών με το ελάχιστο πλήθος εισόδων, κάτι που σημαίνει οικονομία στο υλικό αλλά και μεγαλύτερη ταχύτητα.

Το ζήτημα της ελαχιστοποίησης είναι από τα πλέον σημαντικά στο πεδίο των ψηφιακών συστημάτων και θα μας απασχολήσει εκτενώς στο Κεφάλαιο 4, χωρίς να απουσιάζει όμως και από τα υπόλοιπα κεφάλαια του βιβλίου. Οι προτάσεις της άλγεβρας Boole μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως εργαλείο ελαχιστοποίησης, αλλά υπάρχουν δύο μειονεκτήματα: (1) δεν είναι πάντοτε εύκολη η εξαγωγή της ελαχιστοποιημένης έκφρασης, και (2) δεν υπάρχει κάποια συγκεκριμένη σειρά κανόνων ή μεθοδολογία που πρέπει να ακολουθηθεί για να φτάσουμε στην ελαχιστοποιημένη έκφραση. Αντίθετα, έχουν αναπτυχθεί μέθοδοι (οι οποίες παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 4), οι οποίες ακολουθούν συγκεκριμένους κανόνες και μεθοδολογία και οδηγούν στην απλοποιημένη έκφραση. Στο Παράδειγμα 2.1 που ακολουθεί, θα προσπαθήσουμε χρησιμοποιώντας αλγεβρικούς μετασχηματισμούς, να ξεκινήσουμε από τις πιο πολύπλοκες εκφράσεις των συναρτήσεων F_2 και F_4 και να καταλήξουμε στις απλοποιημένες συναρτήσεις. Ο αναγνώστης θα πρέπει να κατανοήσει τη δυσκολία, η οποία έγκειται στην ανυπαρξία κάποιας συγκεκριμένης μεθοδολογίας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.1

Στους παρακάτω αλγεβρικούς μετασχηματισμούς χρησιμοποιούνται γενικεύσεις των αξιωμάτων και θεωρημάτων που παρουσιάστηκαν. Η απόδειξη των γενικεύσεων αυτών αφήνεται στον αναγνώστη ως άσκηση.

$$
\begin{aligned}
F_3 &= x\,\overline{y}\,\overline{z} + x\,y\,\overline{z} + x\,y\,z \\
&= x\,\overline{y}\,\overline{z} + x\,y\,\overline{z} + x\,y\,z + x\,y\,\overline{z} && \text{(Θεώρημα 1α)} \\
&= x\,\overline{z}(y+\overline{y}) + x\,y\,(z+\overline{z}) && \text{(Αξίωμα 3α)} \\
&= x\,\overline{z}\cdot 1 + x\,y\cdot 1 && \text{(Αξίωμα 5α)} \\
&= x\,\overline{z} + x\,y && \text{(Αξίωμα 4β)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_4 &= \overline{a}\,b\,c\,d + a\,\overline{b}\,c\,d + a\,b\,\overline{c}\,d + a\,b\,c\,\overline{d} + a\,b\,c\,d \\
&= \overline{a}\,b\,c\,d + a\,\overline{b}\,c\,d + a\,b\,\overline{c}\,d + a\,b\,c\,\overline{d} + a\,b\,c\,d + a\,b\,c\,d + a\,b\,c\,d + a\,b\,c\,d && \text{(Θεώρημα 1α)} \\
&= \overline{a}\,b\,c\,d + a\,b\,c\,d + a\,\overline{b}\,c\,d + a\,b\,c\,d + a\,b\,\overline{c}\,d + a\,b\,c\,d + a\,b\,c\,\overline{d} + a\,b\,c\,d && \text{(Αξίωμα 1α)} \\
&= b\,c\,d\,(\overline{a}+a) + a\,c\,d\,(b+\overline{b}) + a\,b\,d(c+\overline{c}) + a\,b\,c\,(d+\overline{d}) && \text{(Αξίωμα 3α)} \\
&= b\,c\,d\cdot 1 + a\,c\,d\cdot 1 + a\,b\,d\cdot 1 + a\,b\,c\cdot 1 && \text{(Αξίωμα 5α)} \\
&= b\,c\,d + a\,c\,d + a\,b\,d + a\,b\,c && \text{(Αξίωμα 4β)} \\
&= a\,b\,c + a\,b\,d + a\,c\,d + b\,c\,d = F_2 && \text{(Αξίωμα 1α)}
\end{aligned}
$$

Ορισμένες παρατηρήσεις που μπορούν να γίνουν πάνω στο Παράδειγμα 2.1 είναι οι ακόλουθες:

1. Είναι φανερό αυτό που τονίστηκε στην αρχή της παραγράφου, ότι δεν υπάρχει καμία μεθοδολογία απλοποίησης μίας λογικής συνάρτησης με αλγεβρικούς μετασχηματισμούς. Στις παραπάνω απλοποιήσεις προσθέσαμε στο άθροισμα έναν όρο γινομένων, ο οποίος διαφέρει από τους υπόλοιπους κατά μία μεταβλητή. Π.χ. στον πρώτο μετασχηματισμό προσθέσαμε τον όρο $x\,y\,\overline{z}$. Η απόδειξη του Θεωρήματος 1α ($x + x = x$), μας δίνει αυτό το δικαίωμα. Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας την επιμεριστική ιδιότητα (αξίωμα 3α), καταφέραμε να εξαλείψουμε μία μεταβλητή από καθένα εκ των άλλων δύο όρων γινομένων, φθάνοντας τελικά σε ένα άθροισμα δύο γινομένων, με δύο μεταβλητές ανά γινόμενο. Στο δεύτερο μετασχηματισμό, προσθέσαμε τρεις επιπλέον φορές τον όρο γινομένων $abcd$, ο οποίος διαφέρει κατά μία μεταβλητή από τους άλλους τέσσερις όρους γινομένων. Η γενίκευση του Θεωρήματος 1α ($x + x + x.... + x = x$) μας δίνει αυτό το δικαίωμα. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα (αξίωμα 3α) καταφέραμε να εξαλείψουμε μία μεταβλητή από καθέναν εκ των άλλων τεσσάρων όρων γινομένων, φθάνοντας τελικά σε ένα άθροισμα τεσσάρων γινομένων, με τρεις μεταβλητές ανά γινόμενο.
2. Η επιλογή της πρόσθεσης επιπλέον όρων γινομένων οι οποίοι εμφανίζονται στο αρχικό άθροισμα (άρα δεν αλλοιώνεται η συνάρτηση) αποτελεί μία καλή πρακτική, ωστόσο, σε καμία περίπτωση δεν αποτελεί μεθοδολογία.
3. Η απλοποιημένη έκφραση στην οποία καταλήξαμε από την F_3, δεν είναι ίδια με την αλγεβρική έκφραση της F_1. Μάλιστα, συμβαίνει να είναι ακόμη πιο απλή, δεδομένου ότι το ένα γινόμενο της F_1 περιέχει τρεις μεταβλητές. Επομένως, παρουσιάζει ενδιαφέρον να εξετάσουμε αν θα καταλήξουμε

σε άλλη, πιο απλή έκφραση, αν ξεκινήσουμε από την F_1. Δείτε το Παράδειγμα 2.2. Αντίθετα, η απλοποιημένη έκφραση στην οποία καταλήξαμε από την F_4, είναι ίδια με εκείνη της F_2.

4. Ανεξάρτητα από την παρατήρηση 3, δεν είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε αν οι εκφράσεις που εξήχθησαν στο Παράδειγμα 2.1 είναι ελαχιστοποιημένες, δηλαδή ότι δεν υπάρχει ακόμη πιο απλή ισοδύναμη έκφραση. Αυτό απορρέει από το γεγονός ότι οι μία διαδικασία απλοποίησης με αλγεβρικούς μετασχηματισμούς δεν ακολουθεί κάποια τυπική μεθοδολογία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.2

Στο παράδειγμα αυτό, θα προσπαθήσουμε να απλοποιήσουμε την $F_1 = x\,y + x\,\overline{y}\,\overline{z}$. Εκ πρώτης όψεως, και ειδικά για έναν όχι και τόσο πεπειραμένο αναγνώστη, η έκφραση δεν φαίνεται να απλοποιείται περαιτέρω. Ωστόσο, γράφοντας την F_1 ως $x(y + \overline{y}z$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την πρόταση 3 του θεωρήματος απορρόφησης. Είναι $x(y + \overline{y}z = x(y + \overline{z}) = xy + x\overline{z}$. Το γεγονός ότι καταφέραμε τελικά να εξάγουμε την ίδια έκφραση για τις F_1 και F_3 δεν αποτελεί εγγύηση ότι αυτή η έκφραση είναι ελαχιστοποιημένη. Στη συγκεκριμένη περίπτωση συμβαίνει να είναι, αλλά αυτό επαληθεύεται μέσα από άλλες μεθόδους, των οποίων το αποτέλεσμα συμφωνεί με την αλγεβρική έκφραση στην οποία καταλήξαμε. Αυτές οι μέθοδοι περιγράφονται στο Κεφάλαιο 4.

2.4.2 ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Μία συνάρτηση $\overline{F}$ καλείται **συμπλήρωμα** μίας συνάρτησης F, όταν δίνει αποτέλεσμα 1 για εκείνους τους συνδυασμούς μεταβλητών για τους οποίους η F δίνει αποτέλεσμα 0 και δίνει αποτέλεσμα 0 για εκείνους τους συνδυασμούς μεταβλητών για τους οποίους η F δίνει αποτέλεσμα 1. Για παράδειγμα, στον Πίνακα 2.5 παρατίθεται ο πίνακας αληθείας της $F_1 = x\,y + x\,\overline{y}\,\overline{z}$ που δόθηκε στην Παράγραφο 2.4.1, αλλά και της συμπληρωματικής της συνάρτησης $\overline{F_1}$, της οποίας η αλγεβρική έκφραση προς το παρόν είναι άγνωστη.

Πίνακας 2.5: Πίνακας αληθείας της F_1 και της $\overline{F_1}$

x	y	z	F_1	$\overline{F_1}$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

Το επόμενο ερώτημα που προκύπτει, αφορά τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να εξάγουμε την αλγεβρική έκφραση της $\overline{F_1}$ και γενικότερα, τον τρόπο εξαγωγής της αλγεβρικής έκφρασης του συμπληρώματος μίας οποιασδήποτε συνάρτησης F. Στην παράγραφο αυτή θα περιγράψουμε τη χρήση του Θεωρήματος De Morgan σε συνδυασμό με την αρχή του δυϊσμού, για την εύρεση του συμπληρώματος μίας συνάρτησης F. Προηγουμένως όμως, θα εξετάσουμε τον Πίνακα αληθείας των F_1 και $\overline{F_1}$.

Από τον πίνακα αληθείας και βάση όσων περιγράφηκαν στην αρχή της Ενότητας 2.4, η λογική έκφραση της $\overline{F_1}$ γράφεται ως ακολούθως:

$$\begin{aligned}
\overline{F_1} &= \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}\,\overline{y}\,z + \overline{x}\,y\,\overline{z} + \overline{x}\,y\,\overline{z} + x\,\overline{y}\,z \\
&= \overline{x}\,\overline{y}(z + \overline{z}) + \overline{x}\,y(z + \overline{z}) + x\,\overline{y}\,z \\
&= \overline{x}\,\overline{y} + \overline{x}\,y + x\,\overline{y}\,z \\
&= \overline{x}\,(\overline{y} + y) + x\,\overline{y}\,z \\
&= \overline{x} + x\,\overline{y}\,z
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Η λογική έκφραση (2.1) δεν είναι σίγουρο ότι είναι ελαχιστοποιημένη (και, στην πραγματικότητα, δεν είναι). Ωστόσο, είναι μία απλοποιημένη έκφραση της αρχικής $\overline{F_1}$. Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε ένα

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.1 Για λογικές εκφράσεις αποτελούμενες από n μεταβλητές $x_1, x_2, ...x_n$, ισχύουν οι σχέσεις:

1. $\overline{(x_1 + x_2 + ...x_n)} = \overline{x_1}\ \overline{x_2}\ ....\overline{x_n}$
2. $\overline{(x_1\ x_2\ ....x_n)} = \overline{x_1} + \overline{x_2}\ .... + \overline{x_n}$

Απόδειξη

1. Η σχέση ισχύει για $n = 2$. Έστω ότι ισχύει για $n = k$, δηλαδή $\overline{(x_1 + x_2 + ...x_k)} = \overline{x_1}\ \overline{x_2}\ ....\overline{x_k}$. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $n = k + 1$, δηλαδή $\overline{(x_1 + x_2 + ...x_k + x_{k+1})} = \overline{x_1}\ \overline{x_2}\ ....\overline{x_k}\ \overline{x_{k+1}}$.
   Θέτοντας $m = x_1 + x_2 + ...x_k$ λαμβάνουμε
   $$\begin{aligned}
   \overline{(x_1 + x_2 + ...x_k + x_{k+1})} &= \overline{(m + x_{k+1})} \\
   &= \overline{m}\ \overline{x_{k+1}} && \text{(Θεώρημα De Morgan 4α)} \\
   &= \overline{(x_1 + x_2 + ...x_k)}\ \overline{x_{k+1}} \\
   &= (\overline{x_1}\ \overline{x_2}\ ....\overline{x_k})\ \overline{x_{k+1}} && \text{(Θεώρημα De Morgan 4α)} \\
   &= \overline{x_1}\ \overline{x_2}\ ....\overline{x_k}\ \overline{x_{k+1}} && \text{(Αξίωμα 2β)}
   \end{aligned}$$
2. Η απόδειξη της δεύτερης πρότασης είναι παρόμοια και αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

διαφορετικό τρόπο εύρεσης του συμπληρώματος μίας συνάρτησης, βάσει του θεωρήματος De Morgan. Η νέα συνάρτηση που θα προκύψει, ας την ονομάσουμε G, θα είναι συμπληρωματική της F_1 αν και μόνον αν έχει ακριβώς τον ίδιο πίνακα αληθείας με την $\overline{F_1}$. Αρχικά, θα πρέπει να δείξουμε ότι το θεώρημα De Morgan ισχύει και για περισσότερες από δύο μεταβλητές. Από την απόδειξη της πρότασης 2.1, θα προκύψει μία απλή βηματική διαδικασία υπολογισμού του συμπληρώματος μίας συνάρτησης F με χρήση του θεωρήματος De Morgan:

1. Λαμβάνουμε το δυϊκό της F
2. Συμπληρώνουμε κάθε μεταβλητή της F

Βάσει των παραπάνω βημάτων, το συμπλήρωμα της συνάρτησης $F_1 = x\ y + x\ \overline{y}\ \overline{z}$, έστω G, θα είναι $(\overline{x} + \overline{y})(\overline{x} + y + z)$. Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, θα πρέπει να δείξουμε ότι οι πίνακες αληθείας των $\overline{F_1}$ και G είναι ίδιοι. Αυτό είναι φανερό από τον Πίνακα 2.6.

Πίνακας 2.6: Πίνακας αληθείας των συμπληρωμάτων της F_1, $\overline{F_1}$ και G

x	y	z	F_1	$\overline{F_1}$	$(\overline{x} + \overline{y})$	$(\overline{x} + y + z)$	G
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	0	1	0

Ορισμένα ακόμη παραδείγματα της εύρεσης του συμπληρώματος μίας συνάρτησης είναι τα ακόλουθα:

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.3 Να βρεθούν τα συμπληρώματα των παρακάτω συναρτήσεων:

1. $F_1 = (x + \overline{y})(x + y + \overline{z})$
2. $F_2 = x\ y + \overline{x}\ \overline{z}$
3. $F_3 = x + (\overline{y} + \overline{z})(x + y)$
4. $F_4 = \overline{x}\ y + x\ \overline{y}\ z$

Λύση

1. Λαμβάνουμε το δυϊκό της F_1, το οποίο είναι $x\,\overline{y} + x\,y\,\overline{z}$. Τέλος, συμπληρώνοντας κάθε μεταβλητή, έχουμε: $\overline{F_1} = \overline{x}\,y + \overline{x}\,\overline{y}\,z$
2. Λαμβάνουμε το δυϊκό της F_2, το οποίο είναι $(x+y)(\overline{x}+\overline{z})$. Συμπληρώνοντας κάθε μεταβλητή, έχουμε $\overline{F_2} = (\overline{x}+\overline{y})(x+z)$.
3. Λαμβάνουμε το δυϊκό της F_3, το οποίο είναι $x\,(\overline{y}\,\overline{z}) + x\,y$. Συμπληρώνοντας κάθε μεταβλητή, έχουμε $\overline{F_3} = \overline{x}\,y\,z + \overline{x}\,\overline{y}$
4. Λαμβάνουμε το δυϊκό της F_2, το οποίο είναι $(\overline{x}+y)(x+\overline{y}+z)$. Συμπληρώνοντας κάθε μεταβλητή, έχουμε $\overline{F_4} = (x+\overline{y})(\overline{x}) + y + \overline{z}$

Η εξαγωγή του συμπληρώματος με τη βοήθεια του Θεωρήματος De Morgan εγείρει ένα άλλο σημαντικό ζήτημα. Όταν μία συνάρτηση είναι εκφρασμένη σε μορφή αθροίσματος γινομένων, τότε το συμπλήρωμά της, όπως αυτό προκύπτει με χρήση του θεωρήματος De Morgan είναι εκφρασμένο ως **γινόμενο αθροισμάτων**. Π.χ., δείτε την έκφραση της G της οποίας ο πίνακας αληθείας παρατέθηκε στον Πίνακα 2.6. Επίσης, δείτε τα ερωτήματα 2 και 4 του Παραδείγματος 2.3. Αυτό σημαίνει ότι μία συνάρτηση Boole μπορεί να εκφραστεί με δύο τρόπους: Ως άθροισμα γινομένων και ως γινόμενο αθροισμάτων. Επίσης, όπως φαίνεται από το ερώτημα 1 του Παραδείγματος 2.4, όταν μία συνάρτηση είναι εκφρασμένη σε μορφή γινομένου αθροισμάτων τότε το συμπλήρωμά της, όπως αυτό προκύπτει με χρήση του θεωρήματος De Morgan είναι εκφρασμένο ως άθροισμα γινομένων.

Οι δύο μορφές έκφρασης μίας συνάρτησης Boole, το άθροισμα γινομένων και το γινόμενο αθροισμάτων (οι οποίες καλούνται και **πρότυπες** μορφές), "πηγάζουν" από δύο αρχικές μορφές, οι οποίες ονομάζονται **κανονικές**. Οι μορφές αυτές είναι το **άθροισμα ελαχιστόρων** και το **γινόμενο μεγιστόρων**. Οι μορφές αυτές παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 4.

2.5 ΣΥΝΟΛΟ ΛΟΓΙΚΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ BOOLE

Με βάση το γεγονός ότι η άλγεβρα Boole περιέχει δύο τελεστές, αν έχουμε στη διάθεσή μας δύο μεταβλητές x και y, μπορούμε να ορίσουμε ένα σύνολο από 2^{2^n}=16 συναρτήσεις, έστω $F_0 - F_{15}$. Κάθε συνάρτηση F προσδιορίζεται από έναν εκ των 16 δυνατών συνδυασμών (0000-1111). Για παράδειγμα, η συνάρτηση F_0, είναι η συνάρτηση που δίνει σταθερό αποτέλεσμα 0 για καθέναν από τους 4 συνδυασμούς των μεταβλητών x και y. Με άλλα λόγια, είναι

x	y	F_0
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Αν διαβάσει κανείς διαδοχικά τις τιμές τις F_0 που αντιστοιχούν σε καθέναν από τους συνδυασμούς των x και y, λαμβάνει 0000=0. Με άλλα λόγια, σχηματίζεται ο δείκτης της συνάρτησης (συνάρτηση F_0). Αντίστοιχα, η συνάρτηση F_1, είναι η συνάρτηση που δίνει αποτέλεσμα 1 μόνον όταν $x = y = 1$:

x	y	F_0
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Η συνάρτηση F_1 είναι η συνάρτηση ΚΑΙ. Αν διαβάσει κανείς διαδοχικά τις τιμές τις F_1 που αντιστοιχούν σε καθέναν από τους συνδυασμούς των x και y, λαμβάνει 0001=1. Με άλλα λόγια, σχηματίζεται ο δείκτης της συνάρτησης (συνάρτηση F_1). Ομοίως, τα αποτελέσματα κάθε μίας από τις άλλες συναρτήσεις είναι τέτοια ώστε να σχηματίζουν κάθε φορά έναν από τους αριθμούς από 2-15. Κάθε μία από αυτές τις συναρτήσεις ορίζει μία συγκεκριμένη συμπεριφορά της εξόδου σε σχέση με τις τιμές των εισόδων. Στη συνέχεια, θα περιγράψουμε τις συναρτήσεις αυτές και θα δώσουμε την αντίστοιχη αλγεβρική σχέση για κάθε μία από αυτές.

Η αλγεβρική σχέση γράφεται σε μορφή αθροισμάτων (Ή) αποτελούμενων από όρους γινομένων (ΚΑΙ). Για να εξάγουμε κάθε όρο γινομένου, εξετάζουμε τις τιμές των x και y για τις οποίες η συνάρτηση δίνει έξοδο 1. Όταν η τιμή μίας μεταβλητής είναι ίση με 0, τότε αυτή γράφεται στο γινόμενο με τη συμπληρωματική της μορφή, ενώ όταν είναι ίση με 1, γράφεται με την κανονική της μορφή. Κάθε άθροισμα περιέχει τόσους όρους γινομένων, όσοι είναι και οι συνδυασμοί των εισόδων για τις οποίες η συνάρτηση δίνει έξοδο 1.

- F_0: Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, η συνάρτηση F_0 είναι ουσιαστικά μία σταθερά με τιμή 0. Η ονομασία της είναι **ουδέτερη** συνάρτηση.
- F_1: Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, η συνάρτηση F_1 είναι η συνάρτηση **ΚΑΙ** (AND). Η λογική έκφραση που περιγράφει την F_1, είναι $F_1 = x \cdot y$ ή $F_1 = x\ y$ (η τελεία παραλείπεται).
- F_2: Η συνάρτηση ονομάζεται **αποτροπή**. Η τιμή της είναι 1 όταν το x είναι 1 και το y είναι 0. Η λογική έκφραση είναι $F_2 = x\ \overline{y}$.
- F_3: Από τον Πίνακα 2.2 είναι φανερό ότι $F_3 = x$. Η συνάρτηση ονομάζεται **μεταφορά**, επειδή η τιμή της εισόδου x μεταφέρεται αυτούσια μέσα από τη λογική πύλη που υλοποιεί τη λογική συνάρτηση.
- F_4: Όπως και η F_2, η συνάρτηση ονομάζεται **αποτροπή**. Η τιμή της είναι 1 όταν το x είναι 0 και το y είναι 1. Η λογική έκφραση είναι $F_4 = \overline{x}\ y$.
- F_5: Από τον Πίνακα 2.2 είναι φανερό ότι $F_5 = y$. Όπως και η F_3, η συνάρτηση ονομάζεται **μεταφορά**.
- F_6: Η συνάρτηση F_6 λαμβάνει τιμή 1 όταν οι είσοδοι x και y διαφέρουν μεταξύ τους. Η ονομασία της, **Αποκλειστικό Ή** (XOR), προέρχεται από το γεγονός ότι αποκλείει κάθε περίπτωση ισότητας ανάμεσα στις εισόδους. Η λογική έκφραση που περιγράφει τη συνάρτηση Αποκλειστικό Ή είναι $F_6 = x\ \overline{y}\ + \overline{x}\ y$. Επίσης, συμβολικά γράφεται και $x \oplus y$.
- F_7: Η συνάρτηση F_7 δίνει έξοδο 1 όταν έστω μία από τις εισόδους είναι ίση με 1. Πρόκειται για τη συνάρτηση **Ή** (OR) και η έκφρασή της είναι $F_7 = x + y$.
- F_8: Η συνάρτηση F_8 δίνει έξοδο 1 όταν και οι δύο είσοδοι x και y είναι ίσες με 0. Πρόκειται για την αντίστροφη συνάρτηση της **Ή**, η οποία ονομάζεται **ΟΥΤΕ** (NOR). Η έκφρασή της είναι $F_8 = \overline{x}\ \overline{y}$ ή $\overline{(x + y)}$.
- F_9: Η συνάρτηση F_9 λαμβάνει τιμή 1 όταν οι είσοδοι x και y είναι ίσες μεταξύ τους. Η ονομασία της είναι **Αποκλειστικό ΟΥΤΕ** ή **Ισοδυναμία** (XNOR). Η λογική έκφραση που περιγράφει τη συνάρτηση Αποκλειστικό ΟΥΤΕ είναι $F_9 = x\ y + \overline{x}\ \overline{y}$ ή $\overline{(x \oplus y)}$ ή $(x \odot y)$.
- F_{10}: Από τον Πίνακα 2.2 είναι φανερό ότι η έξοδος της συνάρτησης F_{10} είναι αντίστροφη της μεταβλητής εισόδου y, δηλαδή $F_{10} = \overline{y}$. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται **συμπλήρωμα**.
- F_{11}: Η συνάρτηση F_{11} δίνει έξοδο 1 όταν η είσοδος x ισούται με 1 ή όταν η είσοδος y ισούται με 0, δηλαδή $F_{11} = x + \overline{y}$. Η συνάρτηση ονομάζεται **συνεπαγωγή**.
- F_{12}: Από τον Πίνακα 2.2 είναι φανερό ότι η έξοδος της συνάρτησης F_{12} είναι αντίστροφη της μεταβλητής εισόδου y, δηλαδή $F_{12} = \overline{x}$. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται **συμπλήρωμα**.
- F_{13}: Η συνάρτηση F_{13} δίνει έξοδο 1 όταν η είσοδος x ισούται με 0 ή όταν η είσοδος y ισούται με 1, δηλαδή $F_{13} = \overline{x} + y$. Όπως και η F_{11}, η συνάρτηση αυτή ονομάζεται **συνεπαγωγή**.
- F_{14}: Από τον Πίνακα 2.2, είναι φανερό ότι η F_{14} δίνει έξοδο 1 όταν έστω μία από τις μεταβλητές εισόδου είναι ίση με 0. Η συνάρτηση είναι αντίστροφη της ΚΑΙ και ονομάζεται **ΟΧΙ-ΚΑΙ** (NAND). Η λογική της έκφραση είναι $F_{14} = \overline{(x \cdot y)}$.
- F_{15}: Η συνάρτηση F_{15} είναι ουσιαστικά μία σταθερά με τιμή 1. Η ονομασία της είναι **ταυτοτική** συνάρτηση.

Οι λογικές συναρτήσεις της άλγεβρας Boole ομαδοποιούνται σε τρεις κατηγορίες:

1. Δύο σταθερές συναρτήσεις με τιμές 0 και 1, οι F_0 και F_{15}.

Πίνακας 2.7: Οι 16 συναρτήσεις της άλγεβρας Boole

x	0	0	1	1		
y	0	1	0	1		
					Ονομασία	**Αλγεβρική Σχέση**
F_0	0	0	0	0	Ουδέτερη	0
F_1	0	0	0	1	ΚΑΙ	$F_1 = x \cdot y$
F_2	0	0	1	0	Αποτροπή	$F_2 = x\,\overline{y}$
F_3	0	0	1	1	Μεταφορά	$F_3 = x$
F_4	0	1	0	0	Αποτροπή	$F_4 = \overline{x}\,y$
F_5	0	1	0	1	Μεταφορά	$F_5 = y$
F_6	0	1	1	0	Αποκλειστικό Ή	$F_6 = x\,\overline{y} + \overline{x}\,y$
F_7	0	1	1	1	Ή	$F_7 = x + y$
F_8	1	0	0	0	ΟΥΤΕ	$\overline{(x + y)}$
F_9	1	0	0	1	Ισοδυναμία	$F_9 = x\,y + \overline{x}\,\overline{y}$
F_{10}	1	0	1	0	Συμπλήρωμα	$F_{10} = \overline{y}$
F_{11}	1	0	1	1	Συνεπαγωγή	$F_{11} = x + \overline{y}$
F_{12}	1	1	0	0	Συμπλήρωμα	$F_{12} = \overline{x}$
F_{13}	1	1	0	1	Συνεπαγωγή	$F_{13} = \overline{x} + y$
F_{14}	1	1	1	0	ΟΧΙ-ΚΑΙ	$F_{14} = \overline{(x \cdot y)}$
F_{15}	1	1	1	1	Ταυτοτική	1

2. Τέσσερις συναρτήσεις μίας μεταβλητής, οι συναρτήσεις μεταφοράς και συμπληρώματος, οι F_3, F_5, F_{10}, και F_{12}.
3. Δέκα συναρτήσεις (F_1, F_2, F_4, F_6, F_7, F_8, F_9, F_{11}, F_{13}, και F_{14}) δύο μεταβλητών, οι οποίες ορίζουν τις πράξεις Ή, ΟΥΤΕ, ΚΑΙ, ΌΧΙ ΚΑΙ, Αποκλειστικό Ή, Ισοδυναμία, Αποτροπή, και Συνεπαγωγή.

Οι παραπάνω συναρτήσεις είναι στοιχειώδεις και υλοποιούνται με τη βοήθεια των ψηφιακών λογικών πυλών. Οι πύλες αυτές, καθώς και οι επεκτάσεις τους σε περισσότερες από δύο εισόδους, παρουσιάζονται αναλυτικά στην επόμενη ενότητα. Στον Πίνακα 2.7 συνοψίζονται οι 16 συναρτήσεις της άλγεβρας Boole. Οι πρώτες 5 στήλες του πίνακα αποτελούν τον πίνακα αληθείας των συναρτήσεων.

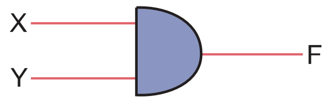
2.6 ΛΟΓΙΚΕΣ ΠΥΛΕΣ

Οι λογικές πύλες είναι κυκλώματα τα οποία παράγουν συγκεκριμένες εξόδους όταν σε αυτές εφαρμοστούν συγκεκριμένες είσοδοι. Διαφορετικά, πρόκειται για κυκλώματα τα οποία υλοποιούν λογικές συναρτήσεις. Υπάρχουν διάφοροι τύποι λογικών πυλών, καθένας από τους οποίους υλοποιεί μία συνάρτηση Boole μίας ή δύο μεταβλητών, από αυτές που παρουσιάστηκαν στην Ενότητα 2.5. Κάθε πύλη έχει το δικό της γραφικό σύμβολο και η λειτουργία της μπορεί να περιγραφεί με την βοήθεια ενός πίνακα αληθείας. Ένα ενδιαφέρον ζήτημα σε σχέση με τις λογικές πύλες είναι η ικανότητα ορισμού άλλων μορφών άλγεβρας Boole, δηλαδή η ικανότητα μίας πύλης να υλοποιεί “αυτόνομα” κάθε συνάρτηση Boole χωρίς να συνδέεται με άλλους τύπους πυλών. Όπως θα διαπιστώσουμε στην ενότητα αυτή, οι πύλες ΌΧΙ-ΚΑΙ και ΟΥΤΕ έχουν αυτήν τη ικανότητα, ορίζοντας ουσιαστικά άλλες μορφές της άλγεβρας Boole.

Στη συνέχεια αυτής της ενότητας, θα περιγράψουμε κάθε πύλη ξεχωριστά και θα μελετήσουμε το ζήτημα της επεκτασιμότητας. Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε την αυτονομία υλοποίησης των πυλών ΌΧΙ-ΚΑΙ και ΟΥΤΕ. Στο τέλος της παραγράφου, θα κάνουμε μία σύντομη πρώτη προσέγγιση σχετικά με τον τρόπο διασύνδεσης των διαφόρων πυλών, ώστε να υλοποιηθεί ένα μεγαλύτερο ψηφιακό κύκλωμα.

2.6.1 ΠΥΛΕΣ ΔΥΟ ΕΙΣΟΔΩΝ

1. Η Πύλη ΚΑΙ (AND) Η πύλη ΚΑΙ δίνει έξοδο 1, όταν όλες οι είσοδοί της είναι ίσες με 1, διαφορετικά δίνει έξοδο 0. Η συνάρτηση που υλοποιεί η πύλη ΚΑΙ είναι η $F = X\,Y$. Στο Σχήμα 2.1. δίνεται το λογικό διάγραμμα μιας πύλης ΚΑΙ με δύο εισόδους, καθώς και ο πίνακας αληθείας της.



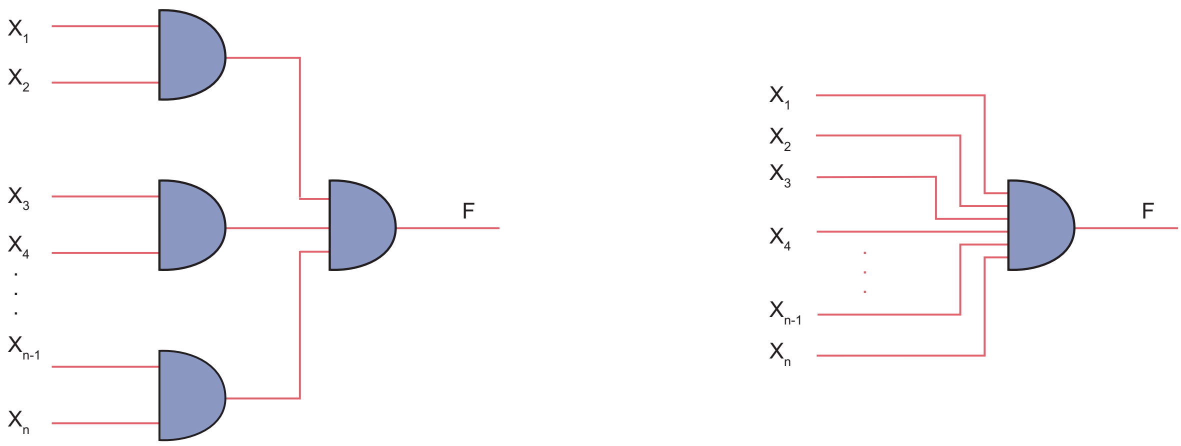
Είσοδος		Έξοδος
X	Y	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Σχήμα 2.1: Το λογικό διάγραμμα της πύλης ΚΑΙ δύο εισόδων και ο πίνακας αληθείας της.

Σύμφωνα με την Παράγραφο 2.2.1, η λογική πράξη ΚΑΙ είναι αντιμεταθετική και προσεταιριστική. Αυτό σημαίνει ότι η πύλη ΚΑΙ μπορεί να επεκταθεί σε μεγαλύτερο πλήθος εισόδων, δηλαδή ισχύει η σχέση

$$(x_1\ x_2)\ \ (x_3\ x_4)\ ....\ (x_{n-1}\ x_n) = (x_1\ x_2\ ....\ x_{n-1}\ x_n).$$

Η παραπάνω ισοδυναμία απεικονίζεται στο Σχήμα 2.2. Όταν οι είσοδοι μιας πύλης ΚΑΙ είναι περισσότερες από $n > 2$, θα πρέπει να είναι όλες ίσες με 1, ώστε η έξοδος της να είναι ίση με 1. Αν έστω και μία είσοδος είναι 0, η πύλη ΚΑΙ n εισόδων δίνει έξοδο 0.



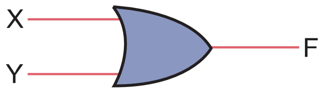
(α) (β)

Σχήμα 2.2: Επεκτασιμότητα της πύλης ΚΑΙ. Οι υλοποιήσεις (α) και (β) είναι ισοδύναμες

2. Η Πύλη Ή (OR) Η πύλη Ή δίνει στην έξοδό της τιμή 1, όταν έστω και μια από τις εισόδους της είναι 1, διαφορετικά, αν όλες οι είσοδοι είναι 0, τότε η έξοδος είναι 0. Η συνάρτηση που υλοποιεί η πύλη Ή είναι η $F = X + Y$. Τονίζεται ακόμη μία φορά ότι, ενώ συμβολικά γράφεται όπως η πρόσθεση τα αποτελέσματά της είναι διαφορετικά από αυτά της δυαδικής πρόσθεσης. Συγκεκριμένα, η πράξη 1 Ή 1 δίνει αποτέλεσμα 1, ενώ όπως παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 1, η πρόσθεση δύο μονάδων δίνει αποτέλεσμα 0. Στο Σχήμα 2.3 δίνεται μια πύλη Ή δύο εισόδων και ο πίνακας αληθείας της.

Ομοίως με τη λογική πράξη ΚΑΙ, η λογική πράξη Ή είναι αντιμεταθετική και προσεταιριστική. Επομένως, η πύλη Ή μπορεί να επεκταθεί σε μεγαλύτερο πλήθος εισόδων, δηλαδή ισχύει ότι

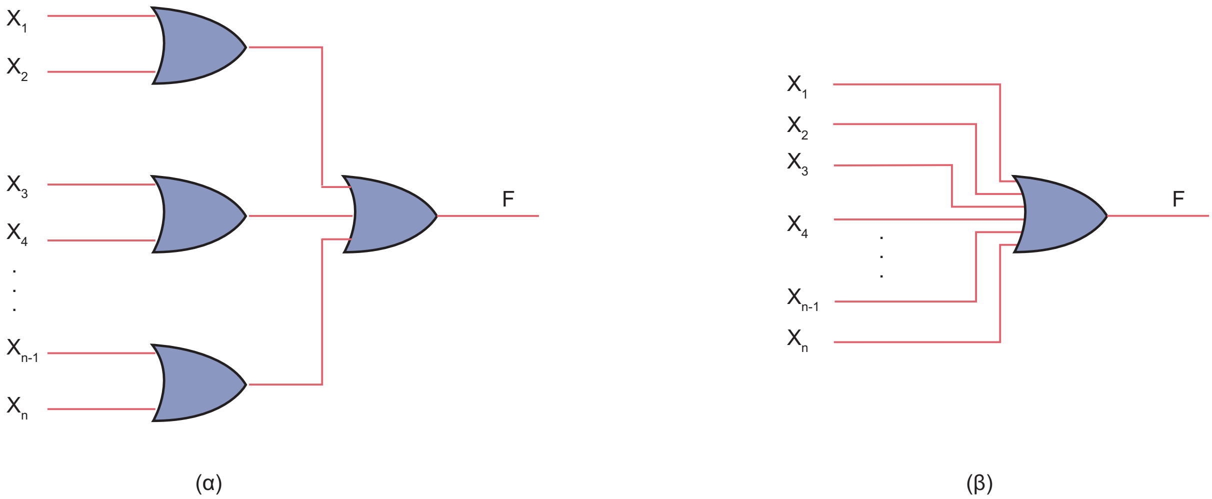
$$(x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) + ... + (x_{n-1} + x_n) = (x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} + x_n).$$



Είσοδος		Έξοδος
X	Y	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

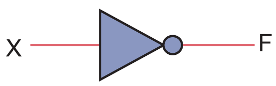
Σχήμα 2.3: Το λογικό διάγραμμα της πύλης Ή δύο εισόδων και ο πίνακας αληθείας της.

Η παραπάνω ισοδυναμία απεικονίζεται στο Σχήμα 2.4.



Σχήμα 2.4: Επεκτασιμότητα της πύλης Ή. Οι υλοποιήσεις (α) και (β) είναι ισοδύναμες

3. Η Πύλη Αντιστροφέα (Inverter) Ο αντιστροφέας είναι μία πύλη η οποία αντιστρέφει την είσοδο, δηλαδή αν η είσοδος είναι 0 την μετατρέπει σε 1 και αν είναι 1 την μετατρέπει σε 0. Η συνάρτηση που υλοποιεί ο αντιστροφέας είναι η $F = \overline{X}$ (συμπλήρωμα του X). Στο Σχήμα 2.5 δίνεται το σύμβολο του αντιστροφέα και ο πίνακας αληθείας του. Το κυκλάκι στο δεξί μέρος της πύλης χρησιμοποιείται για να δείξει αντιστροφή. Γενικώς, το κυκλάκι στα λογικά διαγράμματα σημαίνει αντιστροφή.



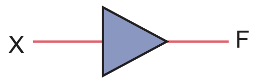
Είσοδος	Έξοδος
X	F
0	1
1	0

Σχήμα 2.5: Το λογικό διάγραμμα της πύλης αντιστροφέα και ο πίνακας αληθείας της.

4. Η Πύλη Απομονωτή (Buffer) Ο απομονωτής είναι μία πύλη, η οποία δίνει στην έξοδο την τιμή της εισόδου. Η συνάρτηση που υλοποιεί ο απομονωτής είναι η $F = X$. Στο Σχήμα 2.6 δίνεται το σύμβολο του απομονωτή και ο πίνακας αληθείας του.

Πίνακας 2.8: Μη ισοδυναμία των αλγεβρικών σχέσεων $(\overline{x\,y\,z})$ και $\overline{(\overline{xy})\,z}$

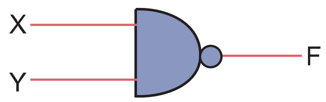
x	y	z	$\overline{x\,y\,z}$	$\overline{(x\,y)}$	$\overline{(x\,y)}\,z$	$\overline{(\overline{xy})\,z}$
0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	0
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	1



Είσοδος	Έξοδος
X	F
0	0
1	1

Σχήμα 2.6: Το λογικό διάγραμμα της πύλης απομονωτή και ο πίνακας αληθείας της.

5. Η Πύλη ΌΧΙ ΚΑΙ (NOT AND - NAND) Η πύλη ΌΧΙ-ΚΑΙ δίνει αποτέλεσμα αντίστροφο από αυτό της πύλης ΚΑΙ. Η συνάρτηση που υλοποιεί η πύλη ΌΧΙ-ΚΑΙ είναι η $F = \overline{XY}$. Στο Σχήμα 2.7. δίνεται μια πύλη ΌΧΙ-ΚΑΙ με δύο εισόδους και ο πίνακας αληθείας της. Είναι φανερό ότι η πύλη ΌΧΙ-ΚΑΙ δίνει έξοδο 1, όταν μια έστω είσοδός της είναι 0.



Είσοδος		Έξοδος
X	Y	F
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Σχήμα 2.7: Το λογικό διάγραμμα της πύλης ΌΧΙ-ΚΑΙ και ο πίνακας αληθείας της.

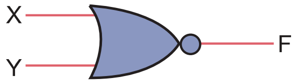
Η λογική πράξη ΌΧΙ-ΚΑΙ είναι αντιμεταθετική, πλην όμως, δεν είναι προσεταιριστική. Αυτό σημαίνει ότι η επέκτασή της σε περισσότερες από δύο εισόδους, χρειάζεται μεγάλη προσοχή. Ο Πίνακας 2.8 απεικονίζει το γεγονός ότι οι αλγεβρικές εκφράσεις $(\overline{x\,y\,z})$ και $\overline{(\overline{xy})\,z}$ δεν είναι ισοδύναμες. Από τον Πίνακα 2.8 είναι φανερό ότι η λογική έκφραση $(\overline{x\,y\,z})$ δεν είναι δυνατόν να υλοποιηθεί χρησιμοποιώντας δύο πύλες ΌΧΙ-ΚΑΙ δύο εισόδων. Στην 'σκηση 2.19 δίνεται ένας τρόπος υλοποίησης της λογικής έκφρασης $(\overline{x\,y\,z})$ με μία αλληλουχία (cascading) τριών πυλών ΌΧΙ-ΚΑΙ δύο εισόδων.

6. Η Πύλη ΟΥΤΕ (NOT OR - NOR) Η πύλη ΟΥΤΕ υλοποιεί τη λογική συνάρτηση $F = \overline{X+Y}$. Στο Σχήμα 2.8. δίνεται το λογικό διάγραμμα μια πύλης ΟΥΤΕ με δύο εισόδους και ο πίνακας αληθείας της. Η έξοδος της πύλης ΟΥΤΕ είναι 0, όταν μια έστω είσοδός της είναι 1, διαφορετικά, είναι 1.

Η λογική πράξη ΟΥΤΕ, είναι αντιμεταθετική, πλην όμως, δεν είναι προσεταιριστική. Ο Πίνακας 2.9 δείχνει ότι οι αλγεβρικές εκφράσεις $(\overline{x+y+z})$ και $\overline{(\overline{x+y})+z}$ δεν είναι ισοδύναμες.

Από τον Πίνακα 2.9, είναι φανερό ότι η λογική έκφραση $(\overline{x+y+z})$ δεν είναι δυνατόν να υλοποιηθεί χρησιμοποιώντας δύο πύλες ΟΥΤΕ δύο εισόδων. Στην 'σκηση 2.19 δίνεται ένας τρόπος υλοποίησης της λογικής έκφρασης $(\overline{x+y+z})$ με μία αλληλουχία τριών πυλών ΟΥΤΕ δύο εισόδων.

7. Η Πύλη Αποκλειστικό Ή (xclusive OR - XOR) Η πύλη αποκλειστικό-Ή δύο εισόδων δίνει έξοδο 0, όταν οι δύο είσοδοι είναι ίδιες μεταξύ τους (0 ή 1), και 1 αν διαφέρουν. Η συνάρτηση που



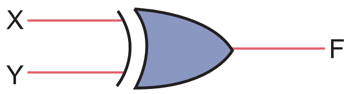
Είσοδος		Έξοδος
X	Y	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Σχήμα 2.8: Το λογικό διάγραμμα της πύλης ΟΥΤΕ και ο πίνακας αληθείας της.

Πίνακας 2.9: Μη ισοδυναμία των αλγεβρικών σχέσεων $(\overline{x+y+z})$ και $\overline{(\overline{x+y})+z}$

x	y	z	$\overline{x+y+z}$	$(\overline{x+y})$	$(\overline{x+y})+z$	$\overline{(\overline{x+y})+z}$
0	0	0	1	1	1	0
0	0	1	0	1	1	0
0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0
1	1	0	0	0	0	1
1	1	1	0	0	1	0

υλοποιεί η πύλη αποκλειστικό Ή είναι η $F = \overline{X}Y + X\overline{Y}$, η οποία συμβολίζεται και ως: $X \oplus Y$. Στο Σχήμα 2.9 δίνεται το λογικό διάγραμμα μιας πύλης αποκλειστικό-Ή δύο εισόδων και ο πίνακας αληθείας της.



Είσοδος		Έξοδος
X	Y	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Σχήμα 2.9: Το λογικό διάγραμμα της πύλης Αποκλειστικό Ή και ο πίνακας αληθείας της.

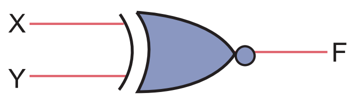
Η συνάρτηση Αποκλειστικό Ή είναι αντιμεταθετική και προσεταιριστική, επομένως επεκτείνεται σε πολλές εισόδους. Σε περίπτωση που η πύλη έχει $n > 2$ εισόδους, η έξοδος είναι 1, όταν οι είσοδοι έχουν περιττό συνολικό πλήθος μονάδων και 0 όταν οι είσοδοι έχουν άρτιο συνολικό πλήθος μονάδων. Ο Πίνακας 2.10 αποδεικνύει την προσεταιριστική ιδιότητα της πράξης Αποκλειστικό Ή.

8. Η Πύλη Αποκλειστικό ΟΥΤΕ (xclusive OR - XOR) Η πύλη αποκλειστικό ΟΥΤΕ δύο εισόδων δίνει αποτέλεσμα 1, όταν οι δύο είσοδοι είναι ίδιες (0 ή 1) και 0 αν είναι διαφορετικές. Η συνάρτηση που υλοποιεί η πύλη αποκλειστικό-ΟΥΤΕ είναι η $F = XY + \overline{X}\overline{Y}$, η οποία συμβολίζεται και ως: $\overline{(X \oplus Y)}$ ή $\overline{(X \odot Y)}$. Το λογικό διάγραμμα μιας πύλης αποκλειστικό-ΟΥΤΕ δύο εισόδων και ο πίνακας αληθείας της δίνονται στο Σχήμα 2.10. Η λογική πράξη αποκλειστικό ΟΥΤΕ, είναι αντιμεταθετική, πλην όμως, δεν είναι προσεταιριστική. Ο Πίνακας 2.11 δείχνει ότι οι αλγεβρικές εκφράσεις $(\overline{x \oplus y \oplus z})$ και $\overline{(\overline{x \oplus y}) \oplus z}$ δεν είναι ισοδύναμες.

Από τον Πίνακα 2.11, είναι φανερό ότι η λογική έκφραση $(\overline{x \oplus y \oplus z})$ δεν μπορεί να υλοποιηθεί χρησιμοποιώντας 2 πύλες αποκλειστικό ΟΥΤΕ 2 εισόδων. Στην 'σκηση 2.19 δίνεται ένας τρόπος υλοποίησης της λογικής έκφρασης $(\overline{x \oplus y \oplus z})$ με μία αλληλουχία τριών πυλών αποκλειστικό ΟΥΤΕ 2 εισόδων.

Πίνακας 2.10: Προσεταιριστική ιδιότητα της πράξης Αποκλειστικό Ή

x	y	z	$(x \oplus y \oplus z)$	$A = (x \oplus y)$	$(A \oplus z)$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	1



Είσοδος		Έξοδος
X	Y	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Σχήμα 2.10: Το λογικό διάγραμμα της πύλης Αποκλειστικό ΟΥΤΕ και ο πίνακας αληθείας της.

Πίνακας 2.11: Μη ισοδυναμία των αλγεβρικών σχέσεων $(\overline{x \oplus y \oplus z})$ και $\overline{(x \oplus y) \oplus z}$

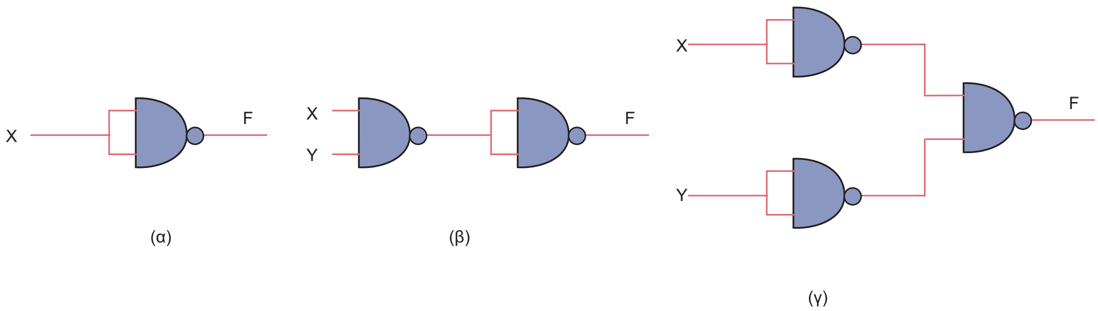
x	y	z	$\overline{x \oplus y \oplus z}$	$\overline{(x \oplus y)}$	$\overline{(x \oplus y)} \oplus z$	$\overline{\overline{(x \oplus y)} \oplus z}$
0	0	0	1	1	1	0
0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	0	1
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1	0
1	1	1	0	1	0	1

2.6.2 ΙΚΑΝΟΤΗΤΑ ΟΡΙΣΜΟΥ ΑΛΛΩΝ ΜΟΡΦΩΝ ΑΛΓΕΒΡΑΣ BOOLE

Στην παράγραφο αυτή δίνεται μία πρώτη προσέγγιση στην ικανότητα των πυλών ΌΧΙ-ΚΑΙ και ΟΥΤΕ να υλοποιούν αυτόνομα οποιαδήποτε άλλη λογική συνάρτηση. Στην πράξη, η ικανότητα αυτή σημαίνει ικανότητα ορισμού άλλων μορφών άλγεβρας Boole. Περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τον τρόπο υλοποίησης οποιουδήποτε λογικού κυκλώματος με αυτούς τους τύπους πυλών παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 4. Εδώ, θα αρκεστούμε να δείξουμε με διαγράμματα πυλών ότι οι αντίστοιχες λογικές πράξεις ΌΧΙ-ΚΑΙ και Ή μπορούν να αντικαταστήσουν τις λογικές πράξεις ΚΑΙ, Ή, και συμπλήρωμα, οι οποίες ορίζουν την άλγεβρα Boole.

Ξεκινώντας με την πράξη ΌΧΙ-ΚΑΙ, το Σχήμα 2.11 δείχνει παρατάξεις πυλών οι οποίες αντικαθιστούν τις λογικές πράξεις που ορίζουν την άλγεβρα Boole. Στο Σχήμα 2.11(α) απεικονίζεται μία υλοποίηση του αντιστροφέα με μία πύλη ΌΧΙ-ΚΑΙ. Το σήμα x τροφοδοτεί τις δύο ειδόδους της πύλης ΌΧΙ-ΚΑΙ, με αποτέλεσμα, αν $x = 0$ η έξοδος F να είναι ίση με $\overline{0 \cdot 0} = 1 = \overline{x}$ και αν $x = 1$ η έξοδος F να είναι ίση με $\overline{1 \cdot 1} = 01 = \overline{x}$.

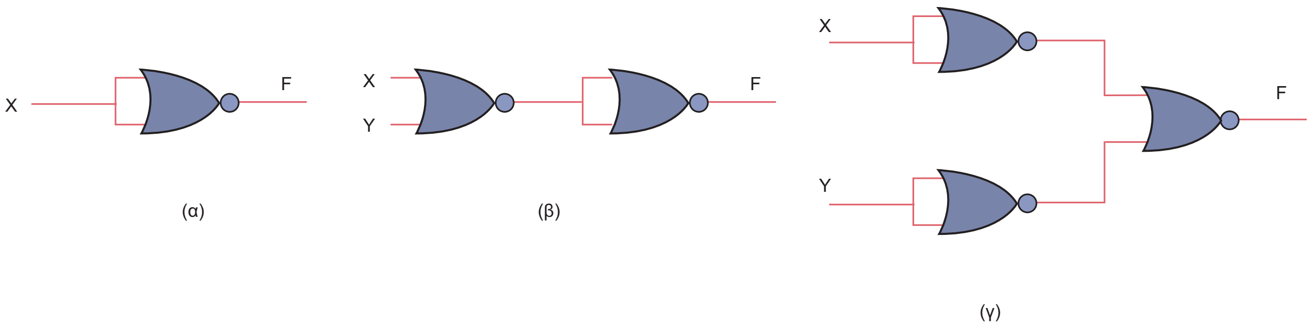
Στο Σχήμα 2.11(β) απεικονίζεται μία υλοποίηση της πύλης ΚΑΙ δύο εισόδων με μία παράταξη πυλών ΌΧΙ-ΚΑΙ. Οι είσοδοι x, y της πύλης ΌΧΙ-ΚΑΙ με αριθμό 1 παράγουν τον πίνακα αληθείας του Σχήματος 2.7. Η πύλη ΌΧΙ-ΚΑΙ με αριθμό 2 λειτουργεί ως αντιστροφέας, ο οποίος παράγει τελικά τον πίνακα



Σχήμα 2.11: Αντικατάσταση των λογικών πράξεων συμπληρώματος, ΚΑΙ, Ή από την πράξη ΌΧΙ-ΚΑΙ

αληθείας της πύλης ΚΑΙ δύο εισόδων (Σχήμα 2.1).

Τέλος, στο Σχήμα 2.11(γ) απεικονίζεται μία υλοποίηση της πύλης Ή δύο εισόδων με μία παράταξη πυλών ΌΧΙ-ΚΑΙ. Οι πύλες ΌΧΙ-ΚΑΙ με αριθμό 1 και 2 λειτουργούν ως αντιστροφείς των εισόδων x και y. Αυτό σημαίνει ότι η πύλη ΌΧΙ-ΚΑΙ με αριθμό 3 υλοποιεί τη λογική σχέση $\overline{(\overline{x} \cdot \overline{y})}$. Όμως, από το θεώρημα De Morgan, (θεώρημα 4β), $\overline{x} \cdot \overline{y} = x + y$. Με αντίστοιχους συλλογισμούς, οι παρατάξεις πυλών των Σχημάτων 2.12(α), 2.12(β), και 2.12(γ), αντικαθιστούν τις πύλες αντιστροφέα, ΚΑΙ, και Ή, αντίστοιχα. Ειδικότερα, για το Σχήμα 2.13(β), η λογική έκφραση που υλοποιείται είναι η $\overline{(\overline{x} + \overline{y})}$, η οποία λόγω του θεωρήματος De Morgan (θεώρημα 4α), είναι ισοδύναμη με την $x \cdot y$.



Σχήμα 2.12: Αντικατάσταση των λογικών πράξεων συμπληρώματος, ΚΑΙ, Ή από την πράξη ΟΥΤΕ

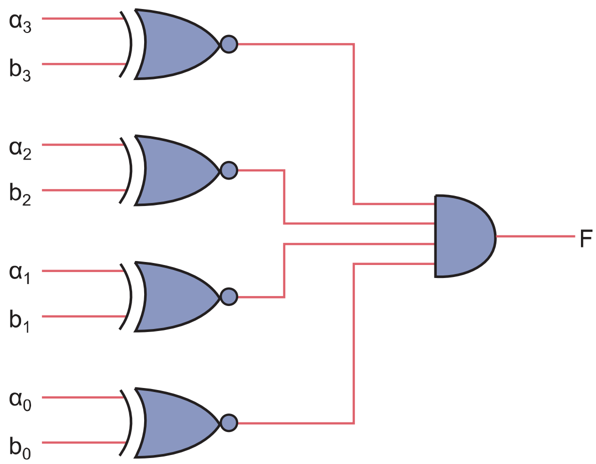
Βάσει των παραπάνω, μπορούμε να δώσουμε τους ακόλουθους επιπλέον ορισμούς της άλγεβρας Boole:

$$A = \{(0,1), \text{NAND}\} \quad \text{Πράξη ΌΧΙ-ΚΑΙ πάνω στα στοιχεία 0 και 1}$$
$$A = \{(0,1), \text{NOR}\} \quad \text{Πράξη ΟΥΤΕ πάνω στα στοιχεία 0 και 1}$$

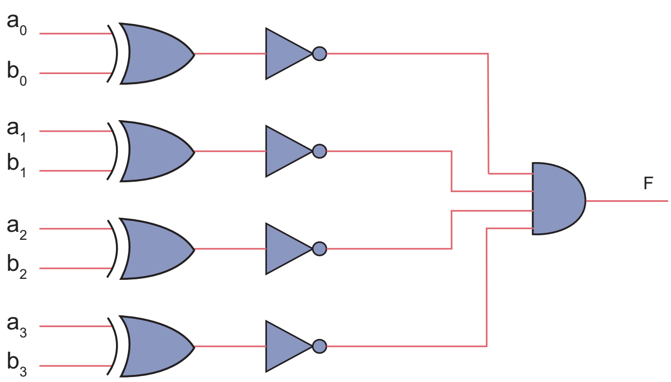
2.6.3 ΔΙΑΣΥΝΔΕΣΗ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΛΟΓΙΚΩΝ ΠΥΛΩΝ

Οι λογικές πύλες που παρουσιάστηκαν στην Παράγραφο 2.6.1, συνδυάζονται μεταξύ τους για να υλοποιήσουν λογικά κυκλώματα. Στην παράγραφο αυτή, θα προσεγγίσουμε για πρώτη φορά το ζήτημα της διασύνδεσης μεταξύ των πυλών. Φυσικά, πολύ περισσότερες λεπτομέρειες υπάρχουν στη συνέχεια του βιβλίου. Στο σημείο αυτό, έχει σημασία να κατανοήσει ο αναγνώστης ότι ένα λογικό κύκλωμα που υλοποιεί μία οποιαδήποτε λειτουργία είναι δυνατόν να υλοποιηθεί με διάφορους τρόπους (λιγότερο ή περισσότερο όμοιους μεταξύ τους), χρησιμοποιώντας διαφορετικούς τύπους πυλών και διαφορετικές διασυνδέσεις αυτών. Αυτή ακριβώς είναι και η έννοια της *σχεδίασης*: ένα κύκλωμα μπορεί να υλοποιηθεί με πολλούς τρόπους.

Ως παράδειγμα, θεωρείστε την υλοποίηση ενός λογικού κυκλώματος, το οποίο συγκρίνει δύο τετράδες bits μεταξύ τους. Οι δύο τετράδες είναι ίδιες αν όλα τα ζεύγη bits που συγκρίνονται είναι ίδια. Σε αυτή την περίπτωση, η έξοδος του κυκλώματος γίνεται 1. Αν έστω και ένα ζεύγος συγκρινόμενων bits δεν είναι ίδιο, τότε οι τετράδες είναι διαφορετικές και η έξοδος του κυκλώματος δίνει 0. Από το σύνολο των πυλών που παρουσιάστηκαν, η πύλη αποκλειστικό-ΟΥΤΕ 2 εισόδων είναι εκείνη, η οποία δίνει έξοδο 1, όταν οι είσοδοί της είναι ίδιες μεταξύ τους. Επομένως, αν ορίσουμε ότι $A = a_3, a_2, a_1, a_0$ και $B = b_3, b_2, b_1, b_0$, είναι οι δύο τετράδες bits, τότε η σύγκριση μεταξύ των ζευγών bits $(a_3, b_3), (a_2, b_2), (a_1, b_1)$, και (a_0, b_0) μπορεί να γίνει με 4 πύλες αποκλειστικό-ΟΥΤΕ με δύο εισόδους, στις οποίες εφαρμόζονται τα συγκρινόμενα ζεύγη bits. Οι τέσσερις έξοδοι των πυλών αποκλειστικό-ΟΥΤΕ στη συνέχεια, θα τεθούν ως είσοδοι σε μια πύλη ΚΑΙ τεσσάρων εισόδων, ώστε να ελεγθεί αν όλα τα ζεύγη είναι μεταξύ τους ίσα. Η πύλη ΚΑΙ, θα δώσει έξοδο 1 μόνο αν όλες οι είσοδοί της (δηλαδή οι έξοδοι όλων των πυλών αποκλειστικό-ΟΥΤΕ) είναι ίσες με 1. Αν έστω και σε μια σύγκριση βρεθούν διαφορετικά bits, τότε η έξοδος της αντίστοιχης πύλης αποκλειστικό-ΟΥΤΕ θα γίνει 0 και επομένως η έξοδος της πύλης ΚΑΙ θα είναι 0. Το λογικό διάγραμμα του συγκριτή τεσσάρων bits δίνεται στο Σχήμα 2.13.



Σχήμα 2.13: Λογικό διάγραμμα κυκλώματος συγκριτή τεσσάρων bits με διασύνδεση πυλών αποκλειστικό ΟΥΤΕ, ΚΑΙ.



Σχήμα 2.14: Λογικό διάγραμμα κυκλώματος συγκριτή τεσσάρων bits με διασύνδεση πυλών αποκλειστικό Ή, αντιστροφέων, ΚΑΙ.

Ο συγκριτής τεσσάρων bits μπορεί να υλοποιηθεί λίγο διαφορετικά, χρησιμοποιώντας πύλες αποκλειστικού Ή. Στην περίπτωση αυτή, οι 4 είσοδοι της πύλης ΚΑΙ θα είναι 1, όταν τα ζεύγη bits μεταξύ τους είναι διαφορετικά. Επομένως, θα χρειαστούν αντιστροφείς για να συμπληρωθεί το αποτέλεσμα των εξόδων των τεσσάρων πυλών αποκλειστικό Ή. Αυτή η λίγο διαφορετική σχεδίαση απεικονίζεται στο Σχήμα 2.14. Από την Παράγραφο 2.6.2, είναι φανερό ότι το κύκλωμα του συγκριτή μπορεί να υλοποιηθεί με άλλους δύο τρόπους: Με πύλες ΌΧΙ-ΚΑΙ ή με πύλες ΟΥΤΕ. Αυτό σημαίνει ότι οι λογικές πράξεις Αποκλειστικό Ή και Αποκλειστικό ΟΥΤΕ θα πρέπει να γραφτούν σε μορφή που περιλαμβάνει τις πράξεις $(\cdot)$, $(+)$, και

(′):

$$
\begin{aligned}
f &= x \oplus y = x\,\overline{y} + \overline{x}\,y \\
f &= \overline{x \oplus y} = x\,y + \overline{x}\,\overline{y}
\end{aligned}
$$

Στη συνέχεια, κάθε πράξη θα πρέπει να υλοποιηθεί με μία από τις διατάξεις των Σχημάτων 2.12(α)-2.12(γ) για υλοποίηση με πύλες ΌΧΙ-ΚΑΙ ή με μία από τις διατάξεις των Σχημάτων 2.13(α)-2.13(γ) για υλοποίηση με πύλες ΟΥΤΕ.

2.7 ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΜΕΛΕΤΗ

BOOL1854 G. Boole, *An Investigation of the Laws of Thought*, Cambridge University Press, 2009. (Αρχική Έκδοση 1854).

BROW07 S. Brown and Z. Vranesic, *Fundamentals of Digital Logic with Verilog Design*, 2nd ed, McGrow-Hill:New York, 2007.

DANI96 J.P Daniels, *Digital Design from Zero to One*, Wiley, New York, 1996.

GAJS97 D.D. Gajski, *Principles of Digital Design*, Prentice-Hall: Upper Saddle River, NJ, 1997.

HAMA07, V.C Hamacher, Z.G Vranesic and S.G Zaky,, *Οργάνωση και Αρχιτεκτονική Υπολογιστών*, Εκδόσεις Επίκεντρο, 2007.

HAYE93 J.P. Hayes, *Introduction to Logic Design*, Addison-Wesley:Reading, MA, 1993.

HILL93 F.J. Hill and G.R. Peterson, *Computer Aided Logical Design with Emphasis on VLSI*, 4th ed, Wiley, New York, 1993.

LALA96 P.K. Lala, *Practical Digital Logic Design and Testing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1996.

MANO05 Moris Mano, *Ψηφιακή Σχεδίαση*, Τρίτη Έκδοση, Εκδόσεις Παπασωτηρίου, 2005.

CCL86 E.J.McCluskey, *Logic Design Principles*, Prentice Hall:Englewood Cliffs, NJ, 1986.

ROTH04, *Fundamentals of Logic Design*, 2nd ed. Thompson/Brooks/Cole: Belmont, Ca., 2004.

SASA93, *Logic Synthesis and Optimization*, Kluwer: Boston, MA, 1993.

WAKE05 J.F. Wakerly, *Digital Design Princeples and Practices*, 4th ed., Prentice Hall: Englewood Cliffs, NJ, 2005.

SOUR08 Σταύρος Σουραβλάς, Μάνος Ρουμελιώτης, *Ψηφιακά Συστήματα: Μοντελοποίηση και Προσομοίωση με τη Γλώσσα VHDL*, Εκδόσεις Τζιόλα, 2008.

2.8 ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΟΙ ΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Βασικοί Όροι

άλγεβρα Boole	επιμεριστική ιδιότητα	ΌΧΙ
αντιμεταθετική ιδιότητα	Ή	ΌΧΙ-ΚΑΙ
αντιστροφέας	θεώρημα De Morgan	προσεταιριστική ιδιότητα
αξιώματα άλγεβρας Boole	θεωρήματα άλγεβρας Boole	συμπλήρωμα
απλοποίηση λογικών συναρτήσεων	ΚΑΙ	συμπλήρωμα συνάρτησης
Αποκλειστικό ΟΥΤΕ	κλειστότητα	σύνολο

Ασκήσεις

2.1. Να αποδείξετε ότι $x\,y + \overline{x}\,z + y\,z = x\,y + \overline{x}\,z$, χρησιμοποιώντας τα αξιώματα της άλγεβρας Boole.

2.2. Να αποδείξετε ότι $x\,\overline{y}\,\overline{z} + x\,y\,\overline{z} + x\,\overline{y}\,z + x\,y\,z = x$

2.3. Να αποδείξετε το επιμεριστικό αξίωμα $x + yz = (x + y)(x + z)$, χρησιμοποιώντας αξιώματα της άλγεβρας Boole

2.4. Χρησιμοποιώντας πίνακα αληθείας, να αποδείξετε το θεώρημα De Morgan: $\overline{(xyz)} = \overline{x} + \overline{y} + \overline{z}$

2.5. Να απλοποιηθούν οι λογικές συναρτήσεις:

α. $\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}\,\overline{y}\,z + \overline{x}\,y\,z + x\,\overline{y}\,\overline{z} + x\,y\,z$

β. $\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}\,y\,\overline{z} + x\,\overline{y}\,\overline{z} + x\,y\,\overline{z}$

γ. $A\,B\,C + A\,B\,\overline{C} + \overline{A}\,B$

2.6. Να απλοποιηθούν οι λογικές συναρτήσεις:

α. $(B\,C + A\,D)(A\,\overline{B} + C\,\overline{D})$

β. $(x\,y\,z)(\overline{x}\,\overline{y}\,z)$

γ. $(x + y)(\overline{x} + \overline{y})(x + y + \overline{x}\,\overline{y})$

2.7. Απλοποιείστε τις παρακάτω συναρτήσεις, χρησιμοποιώντας τα θεωρήματα της άλγεβρας Boole.

α. $\overline{AB}(B + \overline{C} + \overline{B}\,\overline{C}) + \overline{B}$

β. $\overline{B}(\overline{A} + \overline{C})(A + B + \overline{C})$

γ. $(A + \overline{B} + \overline{A} + \overline{D})$

δ. $\overline{\overline{A}\,\overline{B} + C} + C + AB + CD$

ε. $A\,\overline{B}\,C\,D + C\,D + \overline{C}\,D$

στ. $A\,B(B + C) + \overline{(B \oplus C)}$

ζ. $A\,B(B + C) + (B \oplus C)$

2.8. Απλοποιείστε τις συμπληρωματικές συναρτήσεις της ’σκησης 2.7.

2.9. Αν $F = xz + \overline{x}\,\overline{y}$ είναι μία απλοποιημένη συνάρτηση, να βρείτε μία συνάρτηση F_1 αποτελούμενη από 4 αθροίσματα γινομένων, η οποία όταν απλοποιείται οδηγεί στην F.

2.10. Να αποδείξετε ότι $\overline{x}\,\overline{y}\,z + \overline{x}\,y\,\overline{z} + x\,\overline{y}\,\overline{z} + x\,y\,z = x \oplus y \oplus z$

2.11. Να αποδείξετε ότι $xy + xz + yz = xy + (x \oplus y)z$.

2.12. Να βρείτε το συμπλήρωμα της λογικής συνάρτησης $F = x\,y + \overline{x}\,z$ και να αποδείξετε ότι $F\,\overline{F} = 0$

2.13. Να βρείτε τα συμπληρώματα των λογικών συναρτήσεων:

α. $F = A\,B + A\,\overline{B}\,C + A\,\overline{C}$

β. $F = (A\,B + C)\overline{D} + \overline{AB}$

γ. $F = (x + \overline{y} + z)(z + \overline{x})(y + z + x)$

2.14. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του De Morgan, να μετατρέψετε τις παρακάτω συναρτήσεις σε ισοδύναμες, οι οποίες θα περιέχουν μόνον πράξεις Ή και συμπληρώματος.

α. $F = \overline{x}\,\overline{y} + x\,\overline{z} + y\,z$

β. $F = (A + B)(A + \overline{C})(\overline{A} + C)$

2.15. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του De Morgan, να μετατρέψετε τις συναρτήσεις της ’σκησης 2.14 σε ισοδύναμες, οι οποίες θα περιέχουν μόνον πράξεις ΚΑΙ και συμπληρώματος.

2.16. Να δείξετε ότι το δυϊκό της συνάρτησης αποκλειστικού Ή δύο εισόδων ισούται με τη συμπληρωματική της συνάρτηση.

2.17. Να υλοποιήσετε τη λογική έκφραση $f = \overline{x\,y\,z\,w}$ με πύλες ΌΧΙ-ΚΑΙ 2 εισόδων.

2.18. Να υλοποιήσετε τη λογική έκφραση $f = \overline{x + y + z + w}$ με πύλες ΟΥΤΕ 2 εισόδων.

2.19. Στην Παράγραφο 2.6.1, αναφέρθηκε ότι δεν μπορούμε να υλοποιήσουμε τις λογικές πράξεις ΌΧΙ-ΚΑΙ, ΟΥΤΕ, και Αποκλειστικό ΟΥΤΕ τριών μεταβλητών, με δύο πύλες ΌΧΙ-ΚΑΙ, ΟΥΤΕ, και Αποκλειστικό ΟΥΤΕ δύο εισόδων, αντίστοιχα. Ωστόσο, μπορούμε να επιτύχουμε την υλοποίηση αυτών των λογικών πράξεων, αν χρησιμοποιήσουμε μία αλληλουχία (cascading) τριών πυλών ΌΧΙ-ΚΑΙ, ΟΥΤΕ, και Αποκλειστικό ΟΥΤΕ δύο εισόδων, αντίστοιχα. Να δείξετε αυτές τις υλοποιήσεις.

2.20. Γράψτε τον πίνακα αληθείας για την μετατροπή ενός δυαδικού αριθμού 4 bit σε κώδικα Gray των τεσσάρων bit. Γράψτε τις συναρτήσεις για τον υπολογισμό του κάθε bit και απλοποιείστε τις χρησιμοποιώντας τα θεωρήματα της άλγεβρας Boole.

2.21. Γράψτε τον πίνακα αληθείας για την μετατροπή ενός κώδικα Gray των τεσσάρων bit σε δυαδικό αριθμό των 4 bit. Γράψτε τις συναρτήσεις για τον υπολογισμό του κάθε bit και απλοποιείστε τις χρησιμοποιώντας τα θεωρήματα της άλγεβρας Boole.

2.22. Σχεδιάστε το λογικό κύκλωμα για τη μετατροπή ενός αριθμού BCD σε κώδικα excess-3 των 4 bit.

2.23. Να υπολογίσετε το αντίστροφο της συνάρτησης $f = \overline{AB}(\overline{B + \overline{AD}})$ και να το απλοποιήσετε. Να σχεδιάσετε το αντίστοιχο λογικό διάγραμμα.

2.24. Απλοποιείστε τις παρακάτω συναρτήσεις και σχεδιάστε το αντίστοιχο λογικό κύκλωμα.

α. $A\,\overline{B}\,\overline{C}\,D + \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{B}\,C\,\overline{D} + A\,C\,D + A\,B\,D$

β. $(A\,D + C)(B + A\,D)(\overline{B} + \overline{C})$

γ. $A(\overline{\overline{B\,C\,D}\;\overline{C\,E}\;\overline{C}})$

2.25. Να αποδείξετε ότι

α. $\overline{(\overline{A \oplus B}) \oplus (\overline{b \oplus C})} = \overline{A + C}$

β. $\overline{(\overline{A \oplus B}) \oplus C} = \overline{A \oplus (\overline{B \oplus C})}$

2.26. Να αποδείξετε τις παρακάτω ισότητες:

α. $A \oplus B = \overline{A} \oplus \overline{B}$

β. $A \oplus B \oplus A\,B = A + B$

γ. $\overline{A \oplus B} = A \oplus B \oplus 1$

2.27. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΟ Ή και ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ είναι συμπληρωματικές για άρτιο αριθμό όρων, και ταυτόσημες για περιττό αριθμό όρων. Δηλαδή:
$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 .... \oplus x_n = \overline{x_1 \odot x_2 \odot x_3 .... \odot x_n}$, αν το n είναι άρτιο
$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 .... \oplus x_n = x_1 \odot x_2 \odot x_3 .... \odot x_n$, αν το n είναι περιττό

(*Υπόδειξη:* αποδείξτε τις ισότητες για $n = 2$ και $n = 3$ και χρησιμοποιείστε μαθηματική επαγωγή).