

---

# Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο

## 17

### ΚΒΑΝΤΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΕΣ - ΥΛΙΚΟ ΚΑΙ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ

#### ΣΤΟΧΟΙ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Στο κεφάλαιο αυτό οι φοιτητές μπορούν να διδαχτούν βασικά στοιχεία των κβαντικών υπολογιστών και ειδικότερα

- Την αναπαράσταση των qubit
- Τις βασικές κβαντικές πύλες, οι οποίες δρουν πάνω σε 1, 2, ή 3 qubit.
- Τον τρόπο σχεδίασης βασικών κυκλωμάτων, όπως κβαντικός αθροιστής, κβαντικός αποκωδικοποιητής, κβαντικός πολυπλέκτης, κβαντικός συγκριτής.
- Ορισμένους βασικούς κβαντικούς αλγορίθμους, οι οποίοι υλοποιούνται πάνω στο κβαντικό υλικό.

«Αν έχετε συγχυστεί από τις βασικές αρχές της κβαντικής τεχνολογίας, τότε τις έχετε κατανοήσει»  
– Kevin Coleman

**A**υτό το κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στους υπολογιστές του μέλλοντος, τους κβαντικούς υπολογιστές και την κβαντική επεξεργασία της πληροφορίας. Η μελέτη των κβαντικών υπολογιστών απαιτεί γνώσεις από την Κβαντική Μηχανική και από την Πληροφορική. Αυτό το γεγονός καθιστά την κβαντική υπολογιστική ως ένα πεδίο τεράστιου ενδιαφέροντος. Σε αυτό το κεφάλαιο, θα προσεγγίσουμε εισαγωγικά την κβαντική υπολογιστική από την πλευρά του κβαντικού υλικού. Επομένως, αρχικά παρουσιάζονται βασικές πληροφορίες για την αναπαράσταση της κβαντικής πληροφορίας και στη συνέχεια περιγράφονται τα βασικά δομικά στοιχεία του κβαντικού υλικού, οι κβαντικές πύλες. Ο αναγνώστης θα παρατηρήσει ότι υπάρχουν κβαντικές πύλες που υλοποιούν λογικές συναρτήσεις που έχει ήδη γνωρίσει στα προηγούμενα κεφάλαια για τους κλασικούς υπολογιστές, αλλά υπάρχουν και λογικές πράξεις, οι οποίες δεν υλοποιούνται άμεσα από τις γνωστές κβαντικές πύλες. Στη συνέχεια, περιγράφεται η σχεδίαση βασικών κυκλωμάτων, όπως αθροιστές, αφαιρέτες, αποκωδικοποιητές, πολυπλέκτες και συγκριτές. Τα κυκλώματα αυτά περιγράφηκαν στο Κεφάλαιο 5 του βιβλίου και η γνώση τους είναι απαραίτητη για την κατανόηση της σχεδίασης σε κβαντικά συστήματα. Τέλος, παρουσιάζονται ορισμένοι βασικοί κβαντικοί αλγόριθμοι, οι οποίοι είναι σχεδιασμένοι πάνω στο κβαντικό υλικό, όπως είναι ο αλγόριθμος του Deutsch, ο οποίος χαρακτηρίζει μία συνάρτηση ως σταθερή ή ισοροπημένη και ο αλγόριθμος αναζήτησης τυχαίας συμβολοσειράς των Bernstein – Vazirani. Πρέπει να τονιστεί ότι το παρόν κεφάλαιο δεν υποκαθιστά σε καμία περίπτωση ένα πλήρες εγχειρίδιο της κβαντικής υπολογιστικής. Ωστόσο, μπορεί να αποτελέσει μία πολύ καλή εισαγωγή για προπτυχιακούς ή μεταπτυχιακούς φοιτητές που έρχονται για πρώτη φορά σε επαφή με το αντικείμενο.

Ειδικά για το συγκεκριμένο κεφάλαιο, θα ήταν επιθυμητό να μπορέσει να συμβάλει ώστε οι φοιτητές να αποκτήσουν ένα ερέθισμα για να ασχοληθούν εκτενέστερα με μία από τις τεράστιες αλλαγές που θα συντελεστούν στον τομέα της πληροφορικής τα επόμενα χρόνια.

## 17.1 Αναπαράσταση της Κβαντικής Πληροφορίας

Σε αυτή την ενότητα περιγράφεται σύντομα η μονάδα της κβαντικής πληροφορίας που είναι το κβαντικό bit (quantum bit) ή qubit. Στη συνέχεια, περιγράφεται ένα σημαντικό εργαλείο για την αναπαράσταση των qubit είναι η σφαίρα Bloch. Στη συνέχεια, περιγράφονται οι κβαντικοί καταχωρητές, οι οποίοι αποθηκεύουν ένα πλήθος από qubit. Τέλος, περιγράφονται οι βασικές κβαντικές πύλες, οι οποίες δρουν σε 1, 2 ή 3 qubit.

### 17.1.1 Το Κβαντικό bit (qubit)

Η μονάδα αναπαράστασης των δεδομένων ενός κβαντικού υπολογιστή είναι τα qubits. Η βασική διαφορά ανάμεσα στα qubits και στα κλασικά bits των υπολογιστών είναι ότι το qubit, πριν μετρηθεί, δεν βρίσκεται σε καμία από τις δύο βασικές δυαδικές καταστάσεις 0 ή 1, αλλά η τιμή ορίζεται ως πιθανότητα. Οι πιθανές τιμές (ή καταστάσεις) ενός qubit στην πραγματικότητα είναι άπειρες και σχηματίζουν γραμμικούς συνδυασμούς. Αυτή η ιδιότητα των qubits να ορίζεται η τιμή τους ως πιθανότητα ονομάζεται *υπέρθθεση* (superposition). Διαφορετικά, μπορούμε να ορίσουμε ως υπερθέσεις τους γραμμικούς συνδυασμούς των καταστάσεων στις οποίες βρίσκονται τα αλλά είναι δυνατόν να σχηματιστούν γραμμικοί συνδυασμοί των καταστάσεων στις οποίες μπορούν να βρεθούν τα qubits.

Κάθε κβαντική κατάσταση αναπαρίσταται με τους συμβολισμούς bra-ket. Οι συμβολισμοί αυτοί οφείλονται στον Paul A.M. Dirac, ο οποίος έχει σημαντική συνεισφορά στην κβαντική υπολογιστική. Το bra συμβολίζεται ως  $\langle |$ , και πήρε το όνομά του από τα πρώτα τρία γράμματα της λέξης bracket, και το ket συμβολίζεται ως  $| \rangle$ . Το ket γράφεται ως ένας πίνακας  $N \times 1$ , δηλαδή  $N$  γραμμές και μία στήλη. Στον πίνακα αυτό συμπεριλαμβάνονται αριθμοί του μιγαδικού χώρου. Από την άλλη, το bra γράφεται ως ένας πίνακας  $1 \times N$  στήλες, δηλαδή μία γραμμή και  $N$  στήλες. Στον πίνακα αυτό συμπεριλαμβάνονται οι μιγαδικοί συζυγείς του αντίστοιχου ket. Ο πίνακας που αντιστοιχεί στο διάνυσμα bra προκύπτει από τον πίνακα που αντιστοιχεί στο ket αν μετατραπεί η στήλη σε γραμμή και αντικατασταθεί κάθε αριθμός με τον μιγαδικό συζυγή του, δηλαδή αν

$$\begin{aligned} \text{αν } \langle A| &= (A_1 \ A_2 \ \dots \ A_n) \\ \text{τότε } \langle A| &= |A\rangle^\dagger, \quad |A\rangle^\dagger = \langle A| \end{aligned} \quad (17.1)$$

όπου με « $\dagger$ » δηλώνεται ο ανάστροφος του συζυγούς μιγαδικού ενός πίνακα. Στο σημείο αυτό, ας σταθούμε λίγο περισσότερο στα διανύσματα bra και ket. Όπως αναφέρθηκε, τα διανύσματα ket γράφονται ως πίνακες-στήλη. Οι πίνακες αυτοί ονομάζονται και *πίνακες κατάστασης* ή *διανύσματα κατάστασης*. Στην περίπτωση των κβαντικών συστημάτων δύο καταστάσεων οι πίνακες αυτοί έχουν δύο στοιχεία. Ας θεωρήσουμε ότι οι δύο προαναφερθείσες καταστάσεις είναι οι βασικές στις οποίες μπορεί να βρεθεί ένα qubit: 0 και 1. Τότε, το διάνυσμα κατάστασης  $|\psi\rangle$  θα είναι:

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \quad (17.2)$$

Η Εξίσωση (17.2) διαβάζεται « $a$  κατάσταση 0 συν  $b$  κατάσταση 1». Η Εξίσωση (17.2) δείχνει ότι το qubit έχει πιθανότητα  $|a|^2$  να είναι ίσο με 0 και πιθανότητα  $|b|^2$  να είναι ίσο με 1. Προφανώς, ισχύει ότι

$$|a|^2 + |b|^2 = 1, \tag{17.3}$$

δηλαδή το άθροισμα των δύο πιθανοτήτων είναι ίσο με τη μονάδα.

Γενικότερα, ένα qubit μπορεί να βρίσκεται σε οποιαδήποτε άλλη κατάσταση εκτός της 0 και 1. Αν θεωρήσουμε δύο τυχαίες καταστάσεις  $K$  και  $L$ , τότε γενικεύοντας την (17.2) έχουμε:

$$|\psi\rangle = a|K\rangle + b|L\rangle \tag{17.4}$$

Για παράδειγμα, αν η κατάσταση ενός qubit δίνεται από την εξίσωση

$$|\psi\rangle = 0,5|K\rangle + 0,866|L\rangle$$

τότε η πιθανότητα το qubit να βρίσκεται στην κατάσταση  $K$  είναι  $0,5^2 = 0,25$  και η πιθανότητα να βρίσκεται στην κατάσταση  $L$  είναι  $0,866^2 = 0,75$ . Επειδή  $|0,5|^2 + |0,866|^2 = 1$ , η κατάσταση  $\psi$  είναι μία έγκυρη κβαντική κατάσταση. Αντίθετα, αν η κατάσταση ενός qubit δίνεται από την εξίσωση

$$|\psi\rangle = 0,5|K\rangle + 0,5|L\rangle$$

τότε η πιθανότητα το qubit να βρίσκεται στην κατάσταση  $K$  είναι  $0,5^2 = 0,25$  και η πιθανότητα να βρίσκεται στην κατάσταση  $L$  είναι  $0,5^2 = 0,25$ . Επειδή  $|0,5|^2 + |0,5|^2 = 0,5$ , η κατάσταση  $\psi$  είναι μη έγκυρη κβαντική κατάσταση.

Οι δύο βασικές καταστάσεις του qubit αναπαριστάνονται συμβατικά και σε μορφή πινάκων ως εξής:

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{17.5}$$

Εισάγοντας την (17.5) στην (17.2), λαμβάνουμε:

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \tag{17.6}$$

Από τον τρόπο σχηματισμού των bra και ket, είναι φανερό ότι αυτά μπορούν να πολλαπλασιαστούν μεταξύ τους. Ο ορισμός του εσωτερικού γινομένου δύο καταστάσεων δίνεται παρακάτω:

**ΟΡΙΣΜΟΣ 17.1**

Το εσωτερικό γινόμενο δύο καταστάσεων  $|K\rangle$  και  $|L\rangle$  ορίζεται ως το γινόμενο του bra της πρώτης κατάστασης και του ket της δεύτερης. Αν

$$|K\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad |L\rangle = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

τότε το εσωτερικό γινόμενο γράφεται  $\langle K|L\rangle$  και είναι:

$$\langle K|L\rangle = [a^* \ b^*] \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = a^*c + b^*d \tag{17.7}$$

όπου  $a^*$  και  $b^*$  είναι οι μιγαδικοί συζυγείς των  $a$  και  $b$ . Το εσωτερικό γινόμενο είναι ένας αριθμός.

Παρακάτω, ορίζονται οι ορθογώνιες καταστάσεις.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 17.2**

Δύο καταστάσεις ονομάζονται *ορθογώνιες*, όταν το εσωτερικό τους γινόμενο είναι ίσο με 0. Το εσωτερικό γινόμενο μίας κατάστασης με τον εαυτό της είναι ίσο με 1.

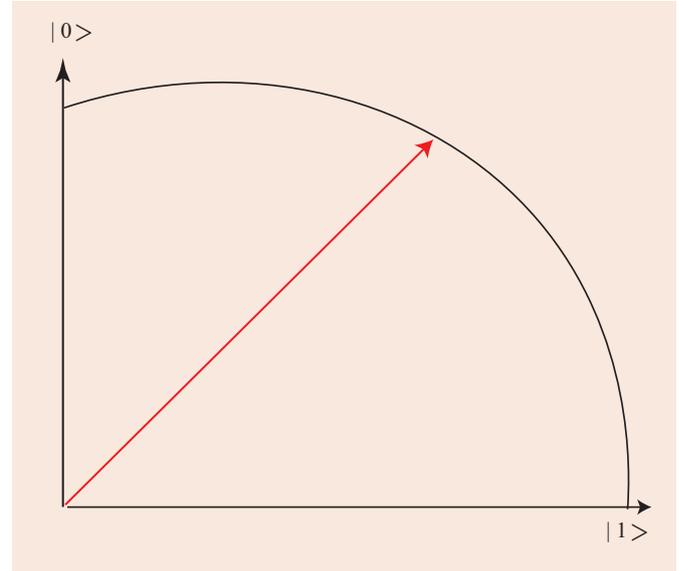
Έτσι, έχουμε

$$\begin{aligned} \langle 0|0\rangle &= [1 \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \\ \langle 1|1\rangle &= [0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \\ \langle 0|1\rangle &= [1 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \\ \langle 1|0\rangle &= [0 \ 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

### 17.1.2 Η Σφαίρα Bloch

Επειδή οι πιθανότητες  $a, b$  των Εξισώσεων 17.3-17.6 είναι μιγαδικοί αριθμοί, για να αναπαραστήσουμε μία κατάσταση  $|y\rangle$  στον χώρο, χρειαζόμαστε έναν χώρο Hilbert 2 διαστάσεων. Ο χώρος Hilbert είναι ένας διανυσματικός χώρος στο πεδίο των μιγαδικών αριθμών, αποτελούμενος από στοιχεία τα οποία είναι ένα σύνολο διανυσμάτων. Ο αναγνώστης μπορεί να αναζητήσει σε σχετικά βιβλία και στο Διαδίκτυο τις βασικές ιδιότητες αυτών των διανυσμάτων. Η παρουσίασή τους είναι εκτός των σκοπών αυτού του βιβλίου. Σε αυτή την παράγραφο, θα περιγράψουμε ορισμένα βασικά στοιχεία, τα οποία μας βοηθούν να κατανοήσουμε την αναπαράσταση ενός διανύσματος κατάστασης  $|y\rangle$ .

Ξεκινώντας, θα παραθέσουμε ορισμένα βασικά στοιχεία, τα οποία είναι απαραίτητα για την κατανόηση. Καταρχήν, αν θεωρήσουμε ότι οι βασικές καταστάσεις  $\langle 0|$  και  $\langle 1|$  βρίσκονται πάνω στον κατακόρυφο και τον οριζόντιο άξονα αντίστοιχα, τότε ένα qubit μπορεί να βρεθεί σε οποιαδήποτε άλλη κατάσταση, η οποία σχηματικά περιγράφεται από μία περιστροφή του διανύσματος κατάστασης, όπως δείχνει το κόκκινο τόξο στο Σχήμα 17.1. Οποιαδήποτε άλλη ενδιάμεση κατάσταση, θα χαρακτηρίζεται από τις πιθανότητες του qubit να είναι ίσο με 0 ή 1, οι οποίες δίνονται από τα  $|a|^2$  και  $|b|^2$ . Στο παράδειγμα του Σχήματος 17.1, είναι  $a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Επομένως, υπάρχει πιθανότητα  $(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = 0,5$  το qubit να είναι ίσο με 0 και ίδια πιθανότητα να είναι ίσο με 1. Γεωμετρικά, η κατάσταση ενός qubit κανονικοποιείται στη μονάδα. Διαφορετικά, μπορούμε να πούμε ότι το διάνυσμα κατάστασης κινείται πάνω σε έναν κύκλο ακτίνας μήκους 1. Γενικά, οι διαφορετικές καταστάσεις που μπορούν να προκύψουν περιγράφονται με πίνακες  $2 \times 2$ , των οποίων τα στοιχεία είναι μιγαδικοί αριθμοί, επομένως χρειαζόμαστε τον χώρο Hilbert. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα πλήθος άπειρων καταστάσεων, οι οποίες δεν δύνανται να απεικονιστούν στον γεωμετρικό χώρο του Σχήματος 17.1. Από την άλλη, δεν μπορούν όλοι οι πίνακες να αναπαραστήσουν καταστάσεις, επειδή το διάνυσμα πρέπει να κινείται σε έναν κύκλο ακτίνας 1, άρα να έχει μήκος ίσο με 1.



Σχήμα 17.1: Χώροι υπερθέσεων.

Στο σημείο αυτό, θα προσπαθήσουμε να γράψουμε την Εξίσωση (17.2) για μιγαδικές πιθανότητες  $a$  και  $b$ . Αρχικά, ξεκινούμε από τη γνωστή ταυτότητα Euler

$$e^{i\phi} = \cos(\phi) + i \sin(\phi), \tag{17.8}$$

η οποία ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό. Τώρα, αναζητούμε τις πολικές συντεταγμένες ενός σημείου: Κάθε σημείο του επιπέδου προσδιορίζεται από την απόστασή του από ένα σημείο αναφοράς (απόσταση ακτίνας, *radial distance*) και από τη γωνία που σχηματίζεται με μία κατεύθυνση αναφοράς (γωνιακή συντεταγμένη, *angular coordinate*). Ως πόλος ορίζεται το σημείο αναφοράς και ως *πολικός άξονας* (polar axis) η ακτίνα από τον πόλο κατά την κατεύθυνση αναφοράς.

Για παράδειγμα, στο Σχήμα 17.2 ο πόλος είναι το σημείο 0 και πολικός άξονας είναι ο  $M$ . Το σημείο στο άνω δεξιά μέρος είναι εκείνο με απόσταση ακτίνας  $r = 3$  και γωνιακή συντεταγμένη  $60^\circ$ . Το σημείο στο κάτω δεξιά μέρος είναι εκείνο με απόσταση ακτίνας  $r = 4$  και γωνιακή συντεταγμένη  $210^\circ$ . Οι καρτεσιανές συντεταγμένες  $x, y$  ενός σημείου μπορούν να προκύψουν από τις πολικές συντεταγμένες  $r$  και  $\phi$  μέσω των εξισώσεων:

$$x = r \cos \phi \quad (\text{προβολή σημείου στον κατακόρυφο άξονα}) \tag{17.9}$$

$$y = r \sin \phi \quad (\text{προβολή σημείου στον οριζόντιο άξονα}) \tag{17.10}$$

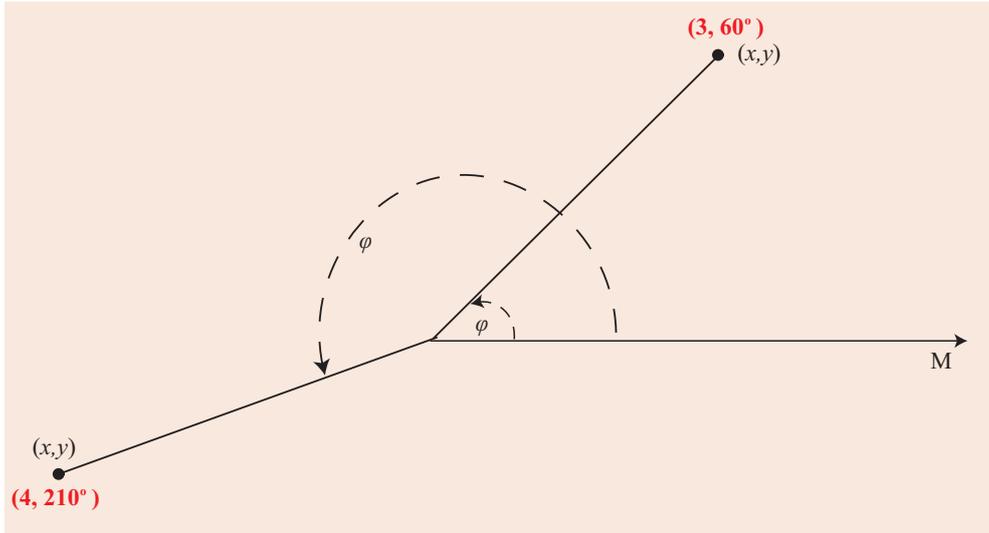
Στο σημείο αυτό, θεωρήστε έναν μιγαδικό αριθμό της μορφής  $z = x + iy$ . Από τις Εξισώσεις (17.9) και (17.10), θα είναι:

$$z = r \cos(\phi) + ri [\sin(\phi)] = r[\cos(\phi) + i(\sin(\phi))] \tag{17.11}$$

Έτσι, χρησιμοποιώντας την ταυτότητα Euler (17.8), θα έχουμε:

$$z_c = r_c e^{i\phi_c} \tag{17.12}$$

για κάποιον αριθμό  $z_c$  με δική του τιμή γωνίας  $\phi$  και ακτίνας  $r$ .



Σχήμα 17.2: Παράδειγμα αναζήτησης πολικών συντεταγμένων.

Ας επιστρέψουμε τώρα στην πολική αναπαράσταση μίας κβαντικής κατάστασης και ας χρησιμοποιήσουμε την Εξίσωση (17.12) για να ορίσουμε ξανά τους συντελεστές  $a$  και  $b$  χρησιμοποιώντας τη νέα πολική μας μορφή:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= a|0\rangle + b|1\rangle \\ &= r_a e^{i\phi_a} |0\rangle + r_b e^{i\phi_b} |1\rangle \end{aligned} \tag{17.13}$$

Η Εξίσωση (17.13) έχει τέσσερις αγνώστους: τα  $r$  και  $\phi$  των συντελεστών  $a$  και  $b$ . Σύμφωνα με τον ορισμό της καθολικής φάσης, αν δύο καταστάσεις ευρισκόμενες σε πολική μορφή διαφέρουν κατά έναν παράγοντα της μορφής  $e^{i\phi_a}$ , τότε θεωρούνται μη διακριτές για κάποιον χρόνο και άρα μπορούμε να τις διαχειριστούμε μαθηματικά ως ίδιες. Άρα, μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε την κατάσταση μας  $|\psi\rangle$  με μία καθολική φάση, σχηματίζοντας την κατάσταση  $|y'\rangle$ :

$$|\psi'\rangle = e^{-i\phi_a} |\psi\rangle \tag{17.14}$$

Αναπτύσσοντας την Εξίσωση (17.14), έχουμε:

$$\begin{aligned} |\psi'\rangle &= e^{-i\phi_a} (r_a e^{i\phi_a} |0\rangle + r_b e^{i\phi_b} |1\rangle) \\ &= r_a |0\rangle + r_b e^{i(\phi_b - \phi_a)} |1\rangle \\ &= r_a |0\rangle + r_b e^{i\phi} |1\rangle \end{aligned} \tag{17.15}$$

όπου το  $\phi$  έχει αντικαταστήσει το  $\phi_b - \phi_a$  από τον ορισμό της καθολικής φάσης. Έτσι, από το ket της κατάστασης  $|0\rangle$  της Εξίσωσης (17.13) έχει εξαληφθεί η μεταβλητή  $e^{i\phi_a}$ . Παρατηρούμε δηλαδή ότι, ενώ ο εκθέτης  $e^{-i\phi_a}$  της  $|y'\rangle$  είναι αυθαίρετος, εξυπηρετεί στην εξάλειψη μίας μεταβλητής.

Γνωρίζουμε ότι  $|r_a|^2 + |r_b|^2 = 1$ , όπου τα  $r_a$  και  $r_b$  βρίσκονται στο διάστημα τιμών  $[0, 1]$ . Παρατηρήστε το Σχήμα 17.3: οι σχέσεις ανάμεσα στα  $r_a$  και  $r_b$  και τη γωνία  $\theta/2$  περιγράφονται από τις κάτωθι εξισώσεις:

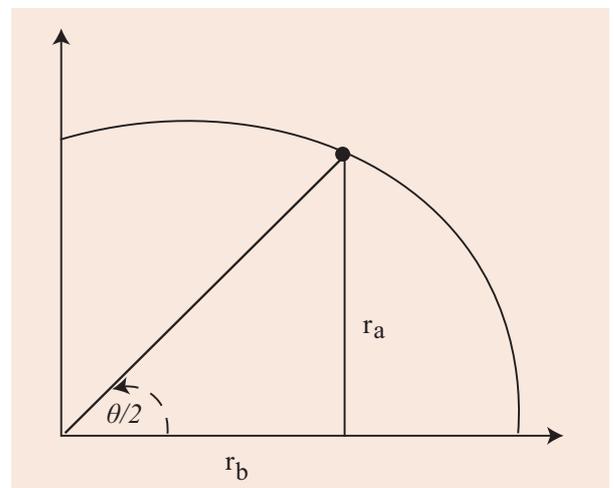
$$r_a = \cos(\theta/2) \tag{17.16}$$

$$r_b = \sin(\theta/2) \tag{17.17}$$

όπου το  $\theta$  βρίσκεται στο διάστημα  $[0, \pi]$ . Έτσι, αν εισάγουμε τις Εξισώσεις (17.16) και (17.17) στην (17.15), καταλήγουμε στην

$$|\psi'\rangle = \cos(\theta/2) |0\rangle + \sin(\theta/2) e^{i\phi} |1\rangle \tag{17.18}$$

Επομένως, η κατάσταση ενός qubit μπορεί να γραφτεί χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (17.18). Πάνω σε αυτή την εξίσωση θα βασιστούμε για να περιγράψουμε όσα θα ακολουθήσουν για τη σφαίρα Bloch. Η σφαίρα Bloch είναι μία γραφική απεικόνιση της κατάστασης  $|\psi\rangle$  ενός qubit, η οποία γίνεται



Σχήμα 17.3: Αναπαράσταση πολικής κατάστασης.

σε τρεις διαστάσεις  $x, y, z$ , όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 17.4. Τα βασικά χαρακτηριστικά της είναι ότι το μήκος της ακτίνας είναι 1 και το διάνυσμα κατάστασης  $|\psi\rangle$  ξεκινάει από το κέντρο της σφαίρας και η φορά του ορίζεται από τις γωνίες  $\theta$  και  $\phi$ . Τα διανύσματα των καταστάσεων  $|0\rangle$  και  $|1\rangle$  είναι αντίρροπα μεταξύ τους. Το πρώτο βρίσκεται στον λεγόμενο «βόρειο πόλο» της σφαίρας, δηλαδή κατακόρυφα με φορά προς τα επάνω και το δεύτερο στον «νότιο πόλο», δηλαδή κατακόρυφα με φορά προς τα κάτω.

Γνωρίζουμε ότι οι καταστάσεις  $|0\rangle$  και  $|1\rangle$  σχηματίζουν γωνία  $90^\circ$  μεταξύ τους, όπως δείχνει το Σχήμα 17.1. Ωστόσο, προσέξτε ότι στη σφαίρα Bloch η μεταξύ τους γωνία είναι  $180^\circ$  και αυτό εξηγεί τη διαίρεση της γωνίας  $\theta$  με το 2. Η γωνία  $\theta$  είναι αυτή που καθορίζει τις τιμές των πιθανοτήτων. Με άλλα λόγια, δίνει την πιθανότητα να μετρήσουμε το qubit στην κατάσταση 0 ή στην κατάσταση 1. Η μέτρηση της γωνίας γίνεται από τον άξονα  $z$  και προς τη θετική φορά. Η τιμή της είναι πάντοτε θετική, ακόμη και αν βρεθεί αριστερά του άξονα  $z$ . Με κόκκινη διακεκομμένη γραμμή απεικονίζεται ο ισημερινός, ο οποίος έχει την ιδιότητα ότι τα σημεία του ισαπέχουν από τους δύο πόλους. Η γωνία  $\phi$  μετριέται από τον άξονα  $x$  κατά τη θετική φορά πάνω στον ισημερινό.

Έχοντας ορίσει τις γωνίες και τους άξονες της σφαίρας Bloch, μπορούμε να εξετάσουμε τις ορισμένες γνωστές καταστάσεις που απεικονίζονται σε αυτή. Ξεκινώντας από τον βόρειο πόλο, παρατηρούμε ότι η γωνία  $\theta$  είναι ίση με 0. Από την άλλη, η γωνία  $\phi$  μπορεί να έχει οποιαδήποτε τιμή. Ας υποθέσουμε ότι  $\theta = \phi = 0$ . Τότε, από την Εξίσωση (17.18) έχουμε:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \cos(\theta/2)|0\rangle + \eta\mu(\theta/2)e^{i\phi}|1\rangle \\ &= \cos 0|0\rangle + \eta\mu(0)e^{i\phi}|1\rangle \\ &= |0\rangle + 0|1\rangle \end{aligned}$$

Άρα, η  $y$  έχει πιθανότητα 1 να είναι  $|0\rangle$  και 0 να είναι  $|1\rangle$ . Επομένως, στον βόρειο πόλο η κατάσταση ενός qubit είναι η μηδενική,  $|0\rangle$ . Ας υποθέσουμε τώρα ότι η γωνία  $\phi$  έχει μία τυχαία μη μηδενική τιμή  $\xi$ . Τότε, πάλι λόγω του μηδενισμού του ημιτόνου ( $\theta = 0$ ) λαμβάνουμε το ίδιο αποτέλεσμα.

Συνεχίζοντας στον νότιο πόλο, παρατηρούμε ότι η γωνία  $\theta$  είναι ίση με  $\pi$ , ξεκινώντας από τον  $z$  και μετακινούμενοι σύμφωνα με το τόξο του Σχήματος 17.4 (προς τη θετική φορά). Από την άλλη, η γωνία  $\phi$  μπορεί να έχει οποιαδήποτε τιμή. Ας υποθέσουμε ότι  $\theta = \phi = 0$ . Τότε, από την Εξίσωση (17.18) έχουμε:

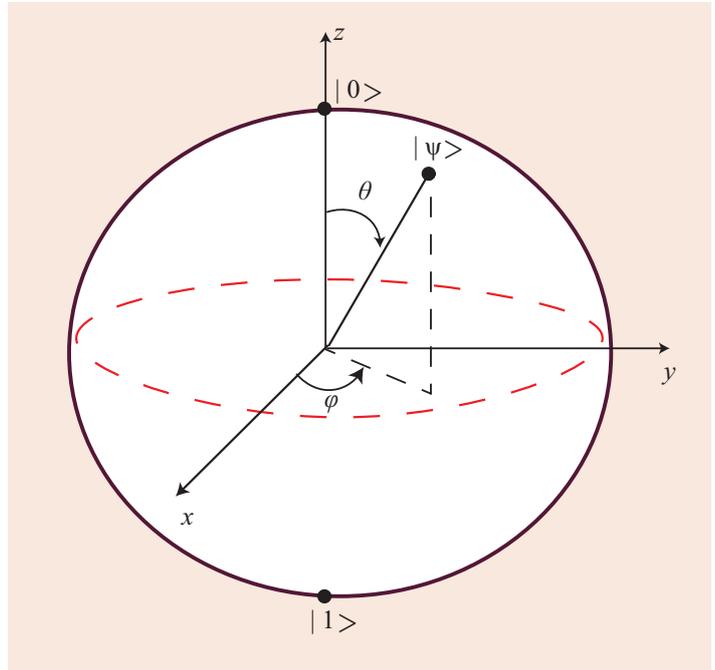
$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \cos(\theta/2)|0\rangle + \eta\mu(\theta/2)e^{i\phi}|1\rangle \\ &= \cos(\pi/2)|0\rangle + \eta\mu(\pi/2)e^{i\phi}|1\rangle \\ &= 0|0\rangle + 1|1\rangle \end{aligned}$$

Άρα, η  $\psi$  έχει πιθανότητα 0 να είναι  $|0\rangle$  και 1 να είναι  $|1\rangle$ . Επομένως, στον νότιο πόλο η κατάσταση ενός qubit είναι η  $|1\rangle$ . Αν υποθέσουμε ότι η γωνία  $\phi$  έχει μία τυχαία μη μηδενική τιμή  $\xi$ . Τότε, πάλι λόγω του μηδενισμού του συνημιτόνου, η πιθανότητα  $\eta|\psi\rangle$  να είναι μηδενική είναι 0. Από την άλλη, η πιθανότητα να είναι 1 θα είναι:

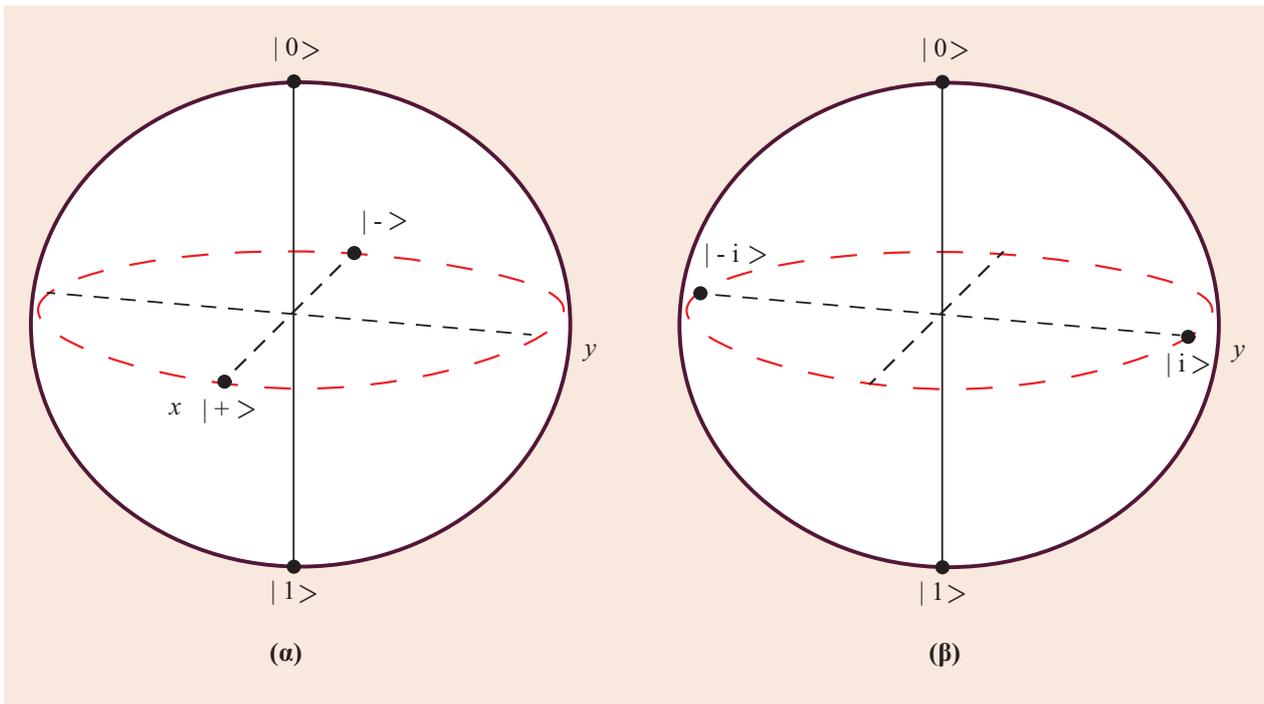
$$\eta\mu(\pi/2)e^{i\xi} = e^{i\xi}$$

Αυτό σημαίνει ότι στο ίδιο σημείο της σφαίρας έχουμε 2 διαφορετικές (φαινομενικά) κβαντικές καταστάσεις. Η διαφορά τους όμως είναι μία καθολική φάση και οι καταστάσεις που διαφέρουν κατά φάση δεν μπορούν να διακριθούν μεταξύ τους με επαναληπτική παρατήρηση. Πρόκειται για διαφορετικές καταστάσεις, όμως αλλά έχουν την ίδια φυσική σημασία. Επομένως, εξακολουθεί να ισχύει ότι η  $\psi$  είναι 1 με πιθανότητα 1.

Στα Σχήμα 17.5(α) και 17.5(β) απεικονίζονται ακόμη τέσσερις γνωστές καταστάσεις, τις οποίες θα αναλύσουμε ανά ζεύγη. Ας ξεκινήσουμε από το Σχήμα 17.5(α) και ας εξετάσουμε τις τιμές που έχουν οι γωνίες  $\theta$  και  $\phi$  στα σημεία που έχουν σημειωθεί με  $|+\rangle$  και  $|-\rangle$ . Ξεκινώντας από το σημείο  $|+\rangle$ , η γωνία  $\theta$  είναι ίση με  $\pi/2$ . Διαισθητικά, ξεκινώντας από τον κατακόρυφο άξονα  $z$  και μετρώντας προς τη θετική φορά πάνω στον ισημερινό (προσέξτε ότι το σημείο βρίσκεται επί του ισημερινού), η απόσταση που διανύεται είναι  $\pi/2$ . Γενικά, όλα τα σημεία του ισημερινού



Σχήμα 17.4: Σφαίρα Bloch.



**Σχήμα 17.5:** (α) Οι καταστάσεις  $|+\rangle$  και  $|-\rangle$ , (β) οι καταστάσεις  $|i\rangle$  και  $|-i\rangle$ .

έχουν γωνία  $\theta = \pi/2$  και έχουν ίση πιθανότητα να μετρηθούν 0 ή 1. Από την άλλη, η γωνία  $\phi$  είναι ίση με 0. Θυμηθείτε, ότι η  $\phi$  μετρείται από τον άξονα  $x$  επί του ισημερινού και κατά τη θετική φορά, επομένως σε αυτή την περίπτωση είναι 0. Χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (17.18) για αυτές τις τιμές των  $\theta$  και  $\phi$  θα έχουμε:

$$|\psi\rangle = \cos(\pi/4)|0\rangle + \eta\mu(\pi/4)|1\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}|1\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}(|0\rangle + |1\rangle)$$

Η κατάσταση  $\frac{\sqrt{2}}{2}(|0\rangle + |1\rangle)$  συμβολικά γράφεται και ως κατάσταση  $|+\rangle$ .

Συνεχίζοντας στο σημείο  $|-\rangle$ , η γωνία  $\theta$  είναι ίση με  $\pi/2$  για τους λόγους που αναφέρθηκαν προηγουμένως. Από την άλλη, η γωνία  $\phi$  είναι ίση με  $\pi$ : η  $\phi$  μετρείται από τον άξονα  $x$  επί του ισημερινού και κατά τη θετική φορά, επομένως από το  $x$  μέχρι το σημείο  $|-\rangle$  σε αυτή την περίπτωση είναι  $\pi$ . Χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (17.18) για αυτές τις τιμές των  $\theta$  και  $\phi$  θα έχουμε:

$$|\psi\rangle = \cos(\pi/4)|0\rangle + \eta\mu(\pi/4)e^{i\pi}|1\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}|0\rangle - \frac{\sqrt{2}}{2}|1\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}(|0\rangle - |1\rangle)$$

Η κατάσταση  $\frac{\sqrt{2}}{2}(|0\rangle - |1\rangle)$  συμβολικά γράφεται και ως κατάσταση  $|-\rangle$ . Σημειώστε ότι ο μιγαδικός αριθμός  $e^{i\pi}$  είναι ίσος [(βλ. Εξίσωση (17.8)] με  $\cos(\pi) + i\eta\mu(\pi) = -1$  και από αυτό το γεγονός προκύπτει το αρνητικό πρόσημο.

Στο Σχήμα 17.5(β), ας εξετάσουμε τις τιμές που έχουν οι γωνίες  $\theta$  και  $\phi$  στα σημεία που έχουν σημειωθεί με  $|i\rangle$  και  $|-i\rangle$ . Ξεκινώντας από το σημείο  $|i\rangle$ , η γωνία  $\theta$  είναι ίση με  $\pi/2$ . Από την άλλη, η γωνία  $\phi$  είναι ίση με  $\pi/2$ , ξεκινώντας από το  $x$  κατά τη θετική φορά και κινούμενοι πάνω στον ισημερινό. Χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (17.18) για αυτές τις τιμές των  $\theta$  και  $\phi$  θα έχουμε:

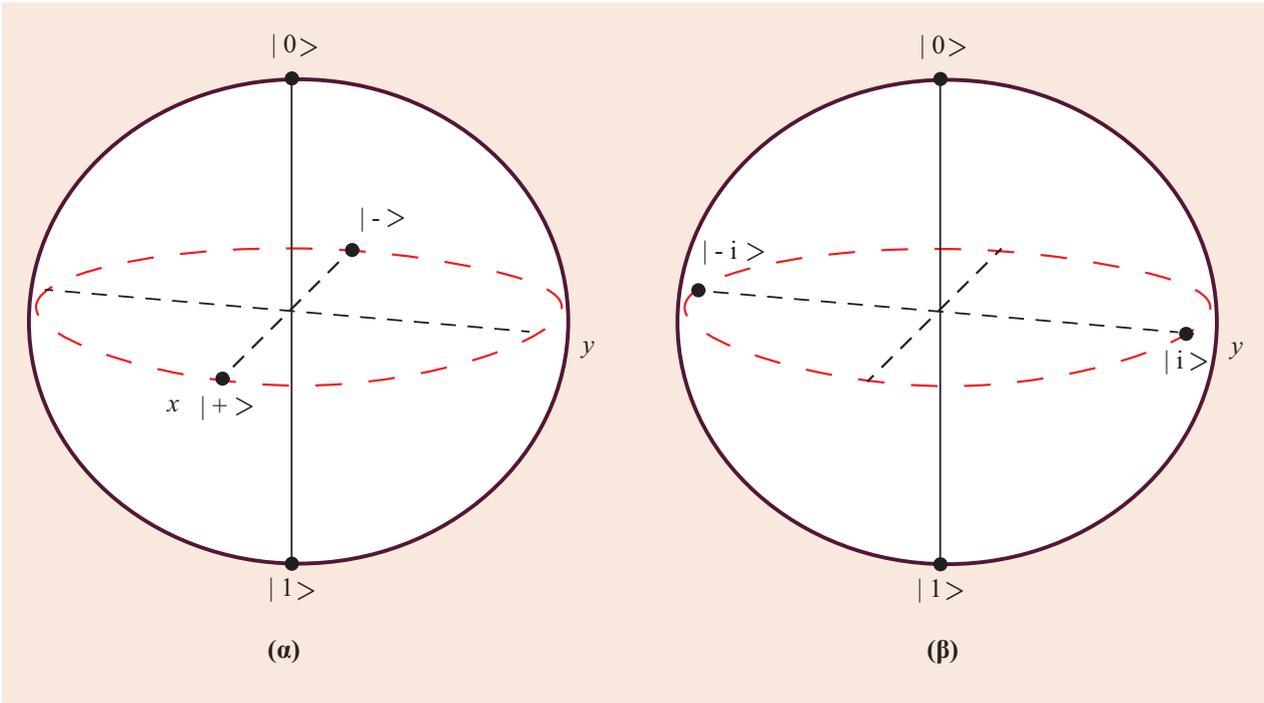
$$|\psi\rangle = \cos(\pi/4)|0\rangle + e^{i\pi/2}\eta\mu(\pi/4)|1\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}(|0\rangle + |i\rangle)$$

Η κατάσταση  $\frac{\sqrt{2}}{2}(|0\rangle + |i\rangle)$  συμβολικά γράφεται και ως κατάσταση  $|i\rangle$ . Προσέξτε ότι [βλ. Εξίσωση(17.8)] ο αριθμός  $e^{i\pi/2} = \cos(\pi/2) + i\eta\mu(\pi/2) = i$ .

Τέλος, στο Σχήμα 17.5(β), ας εξετάσουμε τις τιμές που έχουν οι γωνίες  $\theta$  και  $\phi$  στο σημείο  $|-i\rangle$ : η γωνία  $\theta$  είναι ίση με  $\pi/2$ . Από την άλλη, η γωνία  $\phi$  είναι ίση με  $3\pi/2$ , ξεκινώντας από το  $x$  κατά τη θετική φορά και κινούμενοι πάνω στον ισημερινό. Χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (17.18) για αυτές τις τιμές των  $\theta$  και  $\phi$  θα έχουμε:

$$|\psi\rangle = \cos(\pi/4)|0\rangle + e^{i3\pi/2}\eta\mu(\pi/4)|1\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}(|0\rangle - |i\rangle)$$

Η κατάσταση  $\frac{\sqrt{2}}{2}(|0\rangle - |i\rangle)$  συμβολικά γράφεται και ως κατάσταση  $|-i\rangle$ . Προσέξτε ότι [βλ. Εξίσωση(17.8)] ο αριθμός  $e^{i3\pi/2} = \cos(3\pi/2) + i\eta\mu(3\pi/2) = -1 \times i = -i$ .



Σχήμα 17.5: (α) Οι καταστάσεις  $|+\rangle$  και  $|-\rangle$ , (β) οι καταστάσεις  $|i\rangle$  και  $|-i\rangle$ .

Συνοψίζοντας, οι 6 βασικές καταστάσεις που μπορεί να βρεθεί ένα qubit είναι οι κάτωθι:

- (1) Στον βόρειο πόλο (επί του άξονα z): η μηδενική κατάσταση,  $|0\rangle$ .
- (2) Στον νότιο πόλο (επί του άξονα z): η κατάσταση 1,  $|1\rangle$
- (3) Επί του άξονα x: Οι καταστάσεις  $|+\rangle$  και  $|-\rangle$ .
- (4) Επί του άξονα y: Οι καταστάσεις  $|i\rangle$  και  $|-i\rangle$ .

Έχοντας ορίσει τις βασικές καταστάσεις των qubits, μπορούμε να περάσουμε αρχικά στην περιγραφή των κβαντικών καταχωρητών και στη συνέχεια των κβαντικών πυλών.

### 17.1.3 Κβαντικοί Καταχωρητές

Όπως περιγράφηκε βασικά στο Κεφάλαιο 8, αλλά και σε πολλά άλλα σημεία αυτού του βιβλίου, οι καταχωρητές είναι μονάδες αποθήκευσης ενός στοιχείου bits. Κατά αντιστοιχία με τους συμβατικούς υπολογιστές, στους κβαντικούς υπολογιστές ένα σύνολο qubits σχηματίζουν τον κβαντικό καταχωρητή. Η βασική διαφοροποίηση είναι ότι εδώ η συζήτηση δεν θα στραφεί σε σήματα ελέγχου (ρολόι, σήματα επίτρεψης, σήματα ελέγχου φόρτωσης κλπ), τα οποία αποτελούν σημαντικό τμήμα των γνωστών καταχωρητών που υπάρχουν στους κλασικούς υπολογιστές. Αντίθετα, θα περιγράψουμε τις μαθηματικές εκφράσεις που περιγράφουν τους καταχωρητές και, όταν περιγράψουμε τις βασικές πύλες, θα εξετάσουμε τον τρόπο που η εφαρμογή τους μπορεί να οδηγήσει στην αλλαγή της κβαντικής κατάστασης ενός καταχωρητή.

Ας ξεκινήσουμε με τον κβαντικό καταχωρητή που αποθηκεύει 2 qubit, έστω  $q_1$  και  $q_2$ . Έστω ότι:

$$\begin{aligned} |q_1\rangle &= a|0\rangle + b|1\rangle \\ |q_0\rangle &= c|0\rangle + d|1\rangle \end{aligned}$$

Τότε, η κατάσταση ενός κβαντικού καταχωρητή, έστω  $R$  είναι το τανυστικό γινόμενο των καταστάσεων των 2 qubits:

$$|q_1q_0\rangle = |q_1\rangle \otimes |q_0\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot c \\ a \cdot d \\ b \cdot c \\ b \cdot d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \tag{17.19}$$

Από την Εξίσωση (17.19) προκύπτει ότι

$$|q_1q_0\rangle = y_0|00\rangle + y_1|01\rangle + y_2|10\rangle + y_3|11\rangle \tag{17.20}$$

Ένα τανυστικό γινόμενο παράγει πλήθος στοιχείων που είναι ίσο με το άθροισμα των στοιχείων των 2 διανυσμάτων,  $|q_1\rangle$  και  $|q_2\rangle$ , δηλαδή  $2+2=4$ . Από την Εξίσωση 17.19 φαίνεται ο τρόπος υπολογισμού του τανυστικού γινομένου. Αξίζει να παραθέσουμε τα τανυστικά γινόμενα που προκύπτουν για τις καταστάσεις  $|0\rangle$  και  $|1\rangle$ .

$$|0\rangle \otimes |0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$|0\rangle \otimes |1\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$|1\rangle \otimes |0\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$|1\rangle \otimes |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ας επεκτείνουμε τώρα τη συζήτηση για έναν κβαντικό καταχωρητή τριών qubits, έστω  $q_2, q_1$  και  $q_0$ . Έστω ότι:

$$\begin{aligned} |q_2\rangle &= a|0\rangle + b|1\rangle \\ |q_1\rangle &= c|0\rangle + d|1\rangle \\ |q_0\rangle &= e|0\rangle + f|1\rangle \end{aligned}$$

Τότε, η κατάσταση ενός κβαντικού καταχωρητή, έστω  $R$  είναι το τανυστικό γινόμενο των καταστάσεων των τριών qubits:

$$|q_2q_1q_0\rangle = |q_2\rangle \otimes |q_1\rangle \otimes |q_0\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot c \\ a \cdot d \\ b \cdot c \\ b \cdot d \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot c \cdot e \\ a \cdot c \cdot f \\ a \cdot d \cdot e \\ a \cdot d \cdot f \\ b \cdot c \cdot e \\ b \cdot c \cdot f \\ b \cdot d \cdot e \\ b \cdot d \cdot f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \\ \psi_6 \\ \psi_7 \end{bmatrix} \quad (17.21)$$

Από την Εξίσωση (17.21) προκύπτει ότι

$$|q_2q_1q_0\rangle = \psi_0|000\rangle + \psi_1|001\rangle + \psi_2|010\rangle + \psi_3|011\rangle + \psi_4|100\rangle + \psi_5|101\rangle + \psi_6|110\rangle + \psi_7|111\rangle \quad (17.22)$$

Σε αυτή την περίπτωση, το τανυστικό γινόμενο παράγει πλήθος στοιχείων που είναι ίσο με το γινόμενο των στοιχείων των τριών διανυσμάτων,  $|q_1\rangle$  και  $|q_2\rangle$ , δηλαδή  $2 \times 2 \times 2 = 8$ . Ως παράδειγμα, ο πίνακας που περιγράφει την κατάσταση  $|110\rangle$  θα είναι:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Διαισθητικά, παρατηρήστε ότι ο πίνακας-στήλη που προκύπτει έχει μία μονάδα στη γραμμή 6(ξεκινώντας τη μέτρηση των γραμμών από 0). Ο αριθμός 6 είναι αυτός που σχηματίζουν τα qubits  $|q_2q_1q_0\rangle$ , δηλαδή  $|110\rangle$ .

17.1.4 Κβαντικές Πύλες

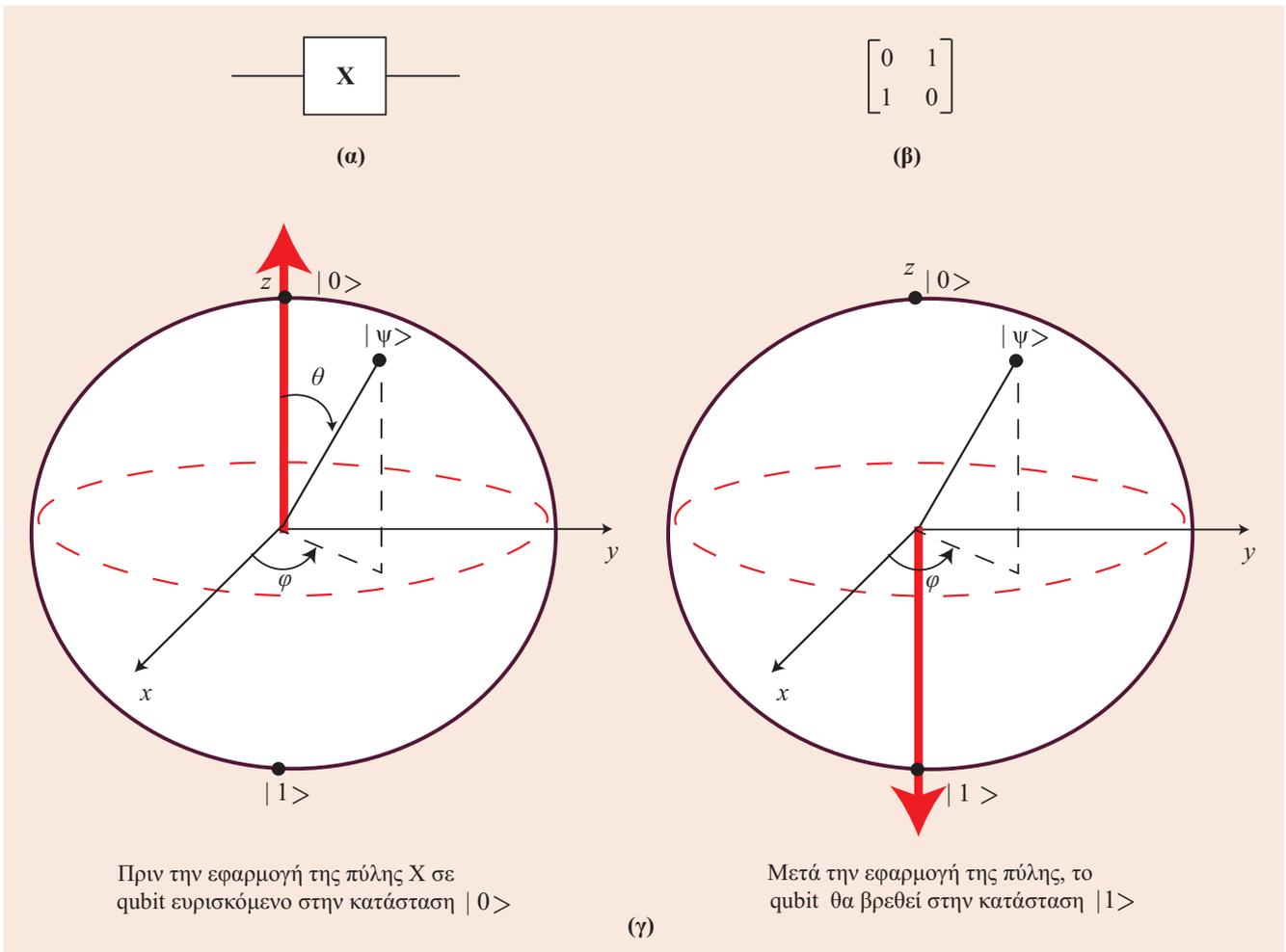
Οι κλασικές πύλες είναι κυκλώματα, τα οποία μεταφέρουν την πληροφορία σε μορφή τάσης. Ουσιαστικά, η πληροφορία διαχέεται μεταξύ των πυλών, υφίσταται επεξεργασία και ενδεχομένως μετατροπή όταν διέρχεται από μία πύλη και καταλήγει στον τελικό προορισμό. Στους κβαντικούς υπολογιστές, η πληροφορία δεν διέρχεται μέσα από τις πύλες. Η πληροφορία βρίσκεται στα qubits και παραμένει εκεί. Η κατάσταση των qubits αλλάζει από τη δράση των κβαντικών πυλών πάνω σε αυτά. Οι κβαντικές πύλες περιγράφονται από μία μήτρα και κατηγοριοποιούνται ανάλογα με το πλήθος των qubits στα οποία δρουν: υπάρχουν πύλες που δρουν σε ένα, σε δύο ή σε τρία qubits.

17.1.5 Πύλες που Δρουν σε Ένα Qubit

Οι κβαντικές πύλες που δρουν σε ένα qubit ουσιαστικά εκτελούν μία περιστροφή του διανύσματος κατάστασης κατά τους άξονες X, Y, Z. Με άλλα λόγια, η ενέργεια αυτών των πυλών είναι να μεταβάλουν τις γωνίες  $\theta$  και  $\phi$ . Σε αυτή την παράγραφο, περιγράφουμε τις πύλες που δρουν σε ένα qubit. Η πρώτη ομάδα πυλών που θα περιγράψουμε είναι οι πύλες Pauli. Πρόκειται για μία πολύ σημαντική ομάδα, γιατί κάθε κβαντική πύλη ενός qubit μπορεί να εκφραστεί με έναν γραμμικό συνδυασμό των πυλών Pauli. Οι τρεις πύλες Pauli είναι οι X, Y, Z.

Η Πύλη X

Η κβαντική πύλη X αντιστοιχεί στη λογική πύλη του αντιστροφέα των συνηθισμένων υπολογιστών. Το διάγραμμα της και η μήτρα της πύλης X απεικονίζονται στο Σχήμα 17.6



Σχήμα 17.6: (α) Σύμβολο της πύλης X, (β) Μήτρα της πύλης X, (γ) Εφαρμογή της πύλης σε qubit ευρισκόμενο στην κατάσταση  $|0\rangle$ .

Για να κατανοήσουμε τη λειτουργία της πύλης, ας θεωρήσουμε την κατάσταση  $a|0\rangle + b|1\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ . Τότε, η εφαρμογή της πύλης X σε αυτή την κατάσταση θα δώσει αποτέλεσμα ίσο με το γινόμενο των πινάκων της πύλης X και

της κατάστασης  $a|0\rangle + b|1\rangle$ , δηλαδή

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}. \quad (17.23)$$

Το αποτέλεσμα που λαμβάνουμε αντιστρέφει τις πιθανότητες  $a$  και  $b$ , δηλαδή η πιθανότητα το qubit να είναι 0 έχει γίνει από  $a$  ίση με  $b$  και η πιθανότητα να είναι 1 έχει γίνει από  $b$  ίση με  $a$ . Στο Σχήμα 17.6(γ) απεικονίζεται πάνω στη σφαίρα Bloch η εφαρμογή της πύλης X σε ένα qubit, το οποίο βρίσκεται στην κατάσταση  $|0\rangle$ . Μετά την εφαρμογή, το qubit μετατοπίζεται στην κατάσταση  $|1\rangle$ . Ας χρησιμοποιήσουμε την Εξίσωση (17.23) για να βρούμε το αποτέλεσμα που έχει η δράση της πύλης X στις γνωστές κβαντικές καταστάσεις:

$$\text{Κατάσταση } |0\rangle : \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (17.24)$$

$$\text{Κατάσταση } |1\rangle : \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17.25)$$

$$\text{Κατάσταση } |+\rangle : \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad (17.26)$$

$$\text{Κατάσταση } |-\rangle : \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad (17.27)$$

$$\text{Κατάσταση } |i\rangle : \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{i\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{i\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad (17.28)$$

$$\text{Κατάσταση } |-i\rangle : \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{-i\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-i\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad (17.29)$$

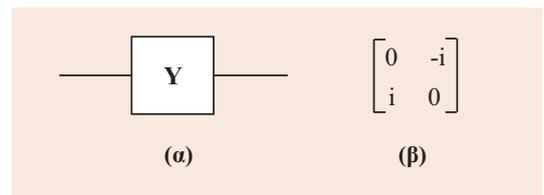
Παρατηρήστε ότι, με εξαίρεση την κατάσταση  $|+\rangle$  (Εξίσωση 17.26), για όλες τις άλλες γνωστές καταστάσεις, δηλαδή  $|0\rangle, |1\rangle, |-\rangle, |i\rangle$  και  $|-i\rangle$ , η εφαρμογή της πύλης X προκαλεί αντιστροφή των πιθανοτήτων των  $a$  και  $b$ . Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή, η πύλη X είναι ισοδύναμη της πύλης αντιστροφείας και επομένως έχει αρκετές πρακτικές εφαρμογές όπως: 1) αρχικοποίηση καταστάσεων, όταν επιθυμούμε ένα qubit να ξεκινά από μία γνωστή κατάσταση, 2) διόρθωση απλών σφαλμάτων, δηλαδή αντιστροφή qubits που προκαλούν σφάλμα (θα το δούμε στην παρουσίαση του κβαντικού κυκλώματος Hamming στην επόμενη ενότητα) και 3) σε υλοποίηση κβαντικών αλγορίθμων που απαιτούν αντιστροφές καταστάσεων (επίσης θα δούμε τέτοια παραδείγματα στο τέλος του κεφαλαίου, όπου περιγράφουμε κβαντικούς αλγορίθμους).

## Η Πύλη Y

Το σχηματικό διάγραμμα και η μήτρα της κβαντικής πύλης Y απεικονίζονται στο Σχήμα 17.7.

Για να κατανοήσουμε τη λειτουργία της πύλης, ας θεωρήσουμε τη βασική κατάσταση  $a|0\rangle + b|1\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ . Τότε, η εφαρμογή της πύλης Y σε αυτή την κατάσταση θα δώσει αποτέλεσμα ίσο με το γινόμενο των πινάκων της πύλης Y και της κατάστασης  $a|0\rangle + b|1\rangle$ , δηλαδή

$$\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -ib \\ a \end{bmatrix}. \quad (17.30)$$



**Σχήμα 17.7:** Σχηματικό διάγραμμα πύλης Y και η μήτρα της.

Επομένως, η εφαρμογή της πύλης Y προκάλεσε και αντιστροφή των πιθανοτήτων  $a$  και  $b$ , αλλά και μία μετατόπιση φάσης κατά  $-i$ . Ας εξετάσουμε τώρα τις συνέπειες που έχει η εφαρμογή της πύλης Y στις βασικές καταστάσεις ενός qubit.

$$\text{Κατάσταση } |0\rangle : \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix} \quad (17.31)$$

$$\text{Κατάσταση } |1\rangle : \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17.32)$$

$$\text{Κατάσταση } |+\rangle : \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-i\sqrt{2}}{2} \\ \frac{i\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad (17.33)$$

$$\text{Κατάσταση } |-\rangle : \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{i\sqrt{2}}{2} \\ \frac{i\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad (17.34)$$

$$\text{Κατάσταση } |i\rangle : \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{i\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-i^2\sqrt{2}}{2} \\ \frac{i\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad (17.35)$$

$$\text{Κατάσταση } |-i\rangle : \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{-i\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{i^2\sqrt{2}}{2} \\ \frac{i\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad (17.36)$$

Το αποτέλεσμα της Εξίσωσης (17.31) γράφεται  $\begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix} = 0|0\rangle + i|1\rangle$ . Η τελευταία, είναι η κατάσταση  $|1\rangle$  μετατοπισμένη κατά  $i$ , δηλαδή  $i|1\rangle$ . Επομένως, η εφαρμογή της  $Y$  σε ένα qubit που βρίσκεται στην κατάσταση  $|0\rangle$  οδηγεί στην κατάσταση  $|1\rangle$  μετατοπισμένη κατά  $i$ . Το αποτέλεσμα της Εξίσωσης (17.32) γράφεται  $\begin{bmatrix} -i \\ 0 \end{bmatrix} = -i|0\rangle + 0|1\rangle$ . Η τελευταία, είναι η κατάσταση  $|0\rangle$  μετατοπισμένη κατά  $-i$ , δηλαδή  $-i|0\rangle$ . Επομένως, η εφαρμογή της  $Y$  σε ένα qubit που βρίσκεται στην  $|1\rangle$  οδηγεί στην κατάσταση  $|0\rangle$  μετατοπισμένη κατά  $-i$ .

Το αποτέλεσμα της Εξίσωσης (17.33) γράφεται  $\begin{bmatrix} \frac{-i\sqrt{2}}{2} \\ \frac{i\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \frac{-i\sqrt{2}}{2}(|0\rangle - |1\rangle)$ . Η τελευταία, είναι η κατάσταση  $|-\rangle$  μετατοπισμένη κατά  $-i$ , δηλαδή  $-i|-\rangle$ . Επομένως, η εφαρμογή της  $Y$  σε ένα qubit που βρίσκεται στην κατάσταση  $|+\rangle$  οδηγεί στην κατάσταση  $|-\rangle$  μετατοπισμένη κατά  $-i$ . Το αποτέλεσμα της Εξίσωσης (17.34) γράφεται  $\begin{bmatrix} \frac{i\sqrt{2}}{2} \\ \frac{i\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \frac{i\sqrt{2}}{2}(|0\rangle + |1\rangle)$ . Η τελευταία, είναι η κατάσταση  $|+\rangle$  μετατοπισμένη κατά  $i$ , δηλαδή  $i|+\rangle$ . Επομένως, η εφαρμογή της  $Y$  σε ένα qubit που βρίσκεται στην κατάσταση  $|-\rangle$  οδηγεί στην κατάσταση  $|+\rangle$  μετατοπισμένη κατά  $i$ .

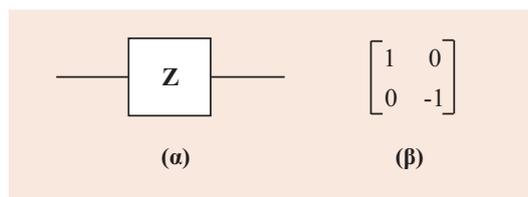
Το αποτέλεσμα της Εξίσωσης (17.35) γράφεται  $\begin{bmatrix} \frac{-i^2\sqrt{2}}{2} \\ \frac{i\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{i\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}(|0\rangle + |i\rangle)$  (προσέξτε ότι η μιγαδική τιμή  $i^2 = -1$ ). Η τελευταία, είναι η κατάσταση  $|i\rangle$ . Επομένως, η εφαρμογή της  $Y$  σε ένα qubit που βρίσκεται στην κατάσταση  $|i\rangle$  οδηγεί στην ίδια κατάσταση  $|i\rangle$ . Τέλος, το αποτέλεσμα της Εξίσωσης (17.36) γράφεται  $\begin{bmatrix} \frac{i^2\sqrt{2}}{2} \\ \frac{i\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{i\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \frac{-\sqrt{2}}{2}(|0\rangle - |i\rangle)$  (προσέξτε ότι η μιγαδική τιμή  $i^2 = -1$ ). Η τελευταία, είναι η κατάσταση  $|-i\rangle$ , δηλαδή η  $|-i\rangle$  μετατοπισμένη κατά φάση. Επομένως, η εφαρμογή της  $Y$  σε ένα qubit που βρίσκεται στην κατάσταση  $|-i\rangle$  οδηγεί στην ίδια κατάσταση  $|-i\rangle$ . Τελικά, η πύλη  $Y$  δεν μεταβάλλει τις καταστάσεις  $|i\rangle$  και  $|-i\rangle$ . Σημειώστε ότι η πιθανότητα των δύο καταστάσεων,  $\frac{-\sqrt{2}}{2}$ , είναι αποδεκτή, επειδή  $(-\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = 1/2$ . Άρα, οι καταστάσεις  $|0\rangle$  και  $|i\rangle$  είναι ισοπίθανες.

## Η Πύλη Z

Το σχηματικό διάγραμμα και η μήτρα της κβαντικής πύλης  $Z$  απεικονίζονται στο Σχήμα 17.8. Η πύλη  $Z$  έχει ένα σημαντικό χαρακτηριστικό: επειδή οι καταστάσεις 0 και 1 βρίσκονται πάνω στον άξονα  $Z$ , θα διαπιστώσουμε ότι η εφαρμογή της δεν αλλάζει την κατάσταση των 0 και 1, αλλά αλλάζει καταστάσεις των qubit, οι οποίες είναι «ενδιάμεσες», όπως οι  $|+\rangle$ ,  $|-\rangle$ ,  $|i\rangle$  και  $|-i\rangle$ .

Για να κατανοήσουμε τη λειτουργία της πύλης, ας θεωρήσουμε τη βασική κατάσταση  $a|0\rangle + b|1\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ . Τότε, η εφαρμογή της πύλης  $Z$  σε αυτή την κατάσταση θα δώσει αποτέλεσμα ίσο με το γινόμενο των πινάκων της πύλης  $Z$  και της κατάστασης  $a|0\rangle + b|1\rangle$ , δηλαδή

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ -b \end{bmatrix}. \quad (17.37)$$



**Σχήμα 17.8:** Σχηματικό διάγραμμα πύλης  $Z$  και η μήτρα της.

Επομένως, η εφαρμογή της πύλης  $Z$  δεν προκάλεσε αντιστροφή των πιθανοτήτων  $a$  και  $b$ , αλλά και μία μετατόπιση φάσης. Στο σημείο αυτό, θα εξετάσουμε τις συνέπειες που έχει η εφαρμογή της πύλης  $Z$  στις βασικές καταστάσεις ενός qubit.

$$\text{Κατάσταση } |0\rangle: \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17.38)$$

$$\text{Κατάσταση } |1\rangle: \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (17.39)$$

$$\text{Κατάσταση } |+\rangle: \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad (17.40)$$

$$\text{Κατάσταση } |-\rangle: \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad (17.41)$$

$$\text{Κατάσταση } |i\rangle: \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{i\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{i\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad (17.42)$$

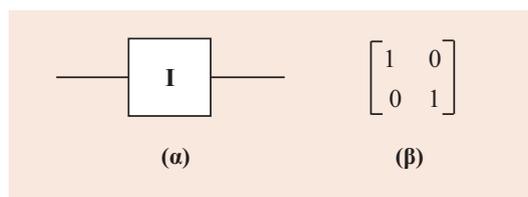
$$\text{Κατάσταση } |-i\rangle: \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{i\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{i\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad (17.43)$$

Το αποτέλεσμα της Εξίσωσης (17.38) είναι η κατάσταση  $|0\rangle$ , ενώ το αποτέλεσμα της Εξίσωσης (17.39) είναι η κατάσταση  $-|1\rangle$ , δηλαδή η  $|1\rangle$  μετατοπισμένη κατά φάση. Όταν το qubit μετρηθεί θα δώσει αποτέλεσμα 1, δηλαδή η πύλη  $Z$  δεν αλλάζει την κατάσταση των 0 και 1. Το αποτέλεσμα της Εξίσωσης (17.40) είναι η κατάσταση  $|-\rangle$ , ενώ το αποτέλεσμα της Εξίσωσης (17.41) είναι η κατάσταση  $|+\rangle$ . Συνεπώς, η πύλη  $Z$  αντιστρέφει τις καταστάσεις  $|+\rangle$  και  $|-\rangle$ . Το αποτέλεσμα της Εξίσωσης (17.42) είναι η κατάσταση  $-|i\rangle$  και το αποτέλεσμα της Εξίσωσης (17.43) είναι η κατάσταση  $|i\rangle$ . Συνεπώς, η πύλη  $Z$  αντιστρέφει τις καταστάσεις  $|i\rangle$  και  $-|i\rangle$ . Άρα, όπως αναφέρθηκε στην αρχή της παραγράφου, η  $Z$  αντιστρέφει τις καταστάσεις που δεν είναι «σταθερές» αλλά «ενδιάμεσες».

## Η Πύλη I

Το σχηματικό διάγραμμα και η μήτρα της κβαντικής πύλης  $I$  απεικονίζονται στο Σχήμα 17.9.

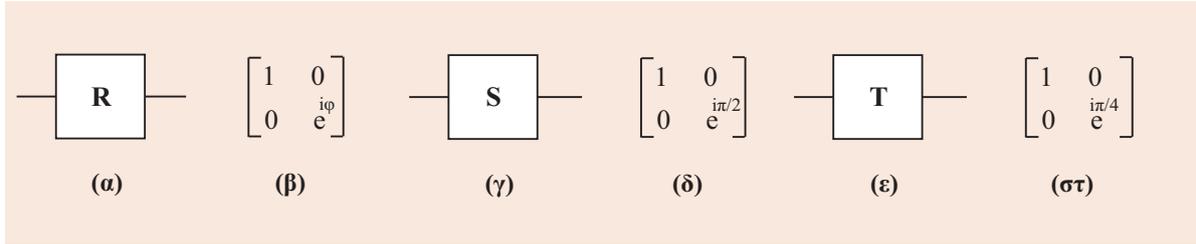
Η πύλη  $I$  είναι αντίστοιχη της πύλης απομονωτή των συνηθισμένων υπολογιστικών συστημάτων. Η εφαρμογή της σε ένα qubit έχει ως αποτέλεσμα το qubit να διατηρήσει την κατάστασή του. Παρατηρήστε από το Σχήμα 17.9(β) ότι η μήτρα της πύλης  $I$  είναι η μοναδιαία (δηλαδή, μονάδες στην κύρια διαγώνιο και μηδενικά σε όλα τα άλλα στοιχεία). Η πύλη  $I$ , παρότι δεν αλλάζει την κατάσταση ενός qubit είναι συχνά χρήσιμη σε υπολογισμούς (βλ. Προβλήματα 11-13) και σε περιπτώσεις που είναι απαραίτητο να μην γίνει κάποια ενέργεια κατά την εκτέλεση ενός αλγορίθμου ή κατά τη λειτουργία ενός τμήματος του υλικού.



**Σχήμα 17.9:** Σχηματικό διάγραμμα πύλης  $I$  και η μήτρα της.

**Οι Πύλες R,S και T**

Τα σχηματικά διαγράμματα και οι μήτρες των κβαντικών πυλών R,S και T απεικονίζονται στο Σχήμα 17.10.



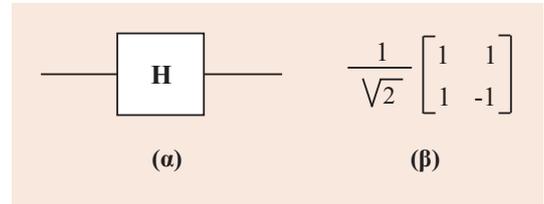
**Σχήμα 17.10:** Σχηματικά διαγράμματα και μήτρες των πυλών R,S και T.

Η πύλη R ονομάζεται (όπως και οι άλλες 2) *παραμετροποιημένη*, επειδή δέχεται ως είσοδο μία παράμετρο και εκτελεί μία λειτουργία πάνω σε ένα qubit με βάση αυτή την παράμετρο, η οποία είναι η  $\phi$ . Η παράμετρος ορίζει μία περιστροφή γύρω από τον άξονα Z κατά  $\phi$  ακτίνια. Το σχηματικό διάγραμμα και η μήτρα της πύλης R απεικονίζονται στα Σχήματα 17.10(α) και (β) αντίστοιχα. Η πύλη S είναι η R με τιμή παραμέτρου  $\phi = \pi/2$ , δηλαδή εφαρμόζει περιστροφή  $\pi/2$  ακτίνια κατά τον άξονα Z. Το σχηματικό διάγραμμα και η μήτρα της πύλης R απεικονίζονται στα Σχήματα 17.10(γ) και (δ) αντίστοιχα. Ομοίως, η πύλη T είναι η R με τιμή παραμέτρου  $\phi = \pi/4$ , δηλαδή εφαρμόζει περιστροφή  $\pi/4$  ακτίνια κατά τον άξονα Z. Το σχηματικό διάγραμμα και η μήτρα της πύλης T απεικονίζονται στα Σχήματα 17.10(ε) και (στ) αντίστοιχα. Οι πύλες I, Y, Z, R, S και T δεν χρησιμοποιούνται για την υλοποίηση κυκλωμάτων, τα οποία θα περιγράψουμε στην επόμενη ενότητα, επομένως δεν θα γίνει περαιτέρω αναφορά σε αυτές στη συνέχεια του βιβλίου, εκτός από ορισμένα προβλήματα στο τέλος της ενότητας. Ωστόσο, πρόκειται για πύλες που είναι ιδιαίτερα χρήσιμες σε άλλους υπολογισμούς και εφαρμογές.

**Η Πύλη Hadamard**

Το σχηματικό διάγραμμα και η μήτρα της κβαντικής πύλης H (Hadamard) απεικονίζονται στο Σχήμα 17.11.

Η πύλη Hadamard είναι μία από τις σημαντικότερες κβαντικές πύλες, επειδή επιβάλλει μία υπέρθεση στο σύστημα κατά την εφαρμογή της. Η πύλη μπορεί να εφαρμοστεί σε ένα qubit, αλλά και σε έναν κβαντικό καταχωρητή, όπως θα δούμε στη συνέχεια. Συχνά, σε ένα κβαντικό σύστημα, είναι απαραίτητο ξεκινάμε από μία «ενδιάμεση» κατάσταση, πριν λάβουν χώρα οι υπολογισμοί. Αυτό επιτυγχάνεται με την πύλη Hadamard. Επίσης, είναι πολύ σημαντικό ότι η εφαρμογή μίας πύλης H στα κβαντικά δεδομένα *επιτρέπει την παράλληλη επεξεργασία όλων των υπερθέσεων, δηλαδή των καταστάσεων που μπορεί να βρεθεί ένα qubit.*



**Σχήμα 17.11:** Σχηματικό διάγραμμα πύλης Hadamard και η μήτρα της.

Για να κατανοήσουμε τη λειτουργία της πύλης, ας θεωρήσουμε την κατάσταση  $a | 0 \rangle + b | 1 \rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ . Τότε, η εφαρμογή της πύλης H σε αυτή την κατάσταση θα δώσει αποτέλεσμα ίσο με το γινόμενο των πινάκων της πύλης H και της κατάστασης  $a | 0 \rangle + b | 1 \rangle$ , δηλαδή

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} a + b \\ a - b \end{bmatrix}. \tag{17.44}$$

Το αποτέλεσμα που λαμβάνουμε δείχνει ένα «ανακάτεμα» των πιθανοτήτων  $a$  και  $b$ , το οποίο οδηγεί στις υπερθέσεις. Ας εξετάσουμε τώρα το αποτέλεσμα που έχει η δράση της πύλης H στις γνωστές κβαντικές καταστάσεις:

$$\text{Κατάσταση } | 0 \rangle : \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{17.45}$$

$$\text{Κατάσταση } | 1 \rangle : \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{17.46}$$

$$\text{Κατάσταση } |+\rangle : \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17.47)$$

$$\text{Κατάσταση } |-\rangle : \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (17.48)$$

Από τις Εξισώσεις (17.45) και (17.46), διαπιστώνουμε εύκολα ότι η εφαρμογή της πύλης H αλλάζει την κατάσταση  $|0\rangle$  σε  $|+\rangle$  και την κατάσταση  $|1\rangle$  σε  $|-\rangle$ . Από τις Εξισώσεις (17.47) και (17.48), διαπιστώνουμε ότι η εφαρμογή της πύλης H αλλάζει την κατάσταση  $|+\rangle$  στην  $|0\rangle$  και την κατάσταση  $|-\rangle$  στην  $|1\rangle$ . Όπως θα διαπιστώσουμε στη συνέχεια, η βασικότερη χρήση της πύλης H είναι η εφαρμογή της σε μία ομάδα qubits (κβαντικό καταχωρητή ή μεμονωμένα qubits), τα οποία αρχικοποιούνται στην κατάσταση  $|0\rangle$  και  $|1\rangle$ , με στόχο να δημιουργηθεί ένα πλήθος υπερθέσεων για αυτά τα qubit. Η εφαρμογή της σε qubit που βρίσκονται σε ενδιαμέση κατάσταση, για παράδειγμα  $|+\rangle$  ή  $|-\rangle$  έχει προφανώς ως στόχο την επαναφορά σε «σταθερή» κατάσταση.

Σε ένα qubit, είναι δυνατόν να εφαρμοστεί στη σειρά μία παράταξη διαφορετικών κβαντικών πυλών. Σε αυτή την περίπτωση, η τελική κατάσταση του κυκλώματος προκύπτει από το γινόμενο της μήτρας που περιγράφει την κατάσταση του qubit και των μητρών που περιγράφουν τις πύλες που δρουν στο qubit. Στο Παράδειγμα 17.1 εξετάζεται τι θα συμβεί αν σε ένα qubit ευρισκόμενο στην κατάσταση  $|0\rangle$  εφαρμοστούν διαδοχικά οι πύλες H, Z και H.

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 17.1

Ένα qubit βρίσκεται σε κατάσταση  $|0\rangle$  και εφαρμόζεται ως είσοδος σε μία παράταξη πυλών HZH. Ποιο θα είναι το αποτέλεσμα;

**Λύση:** Εφαρμόζουμε διαδοχικές τις πύλες, ξεκινώντας από την Hadamard.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

Επομένως, η εφαρμογή της πύλης H στο qubit που βρίσκεται στην κατάσταση  $|0\rangle$  οδηγεί το qubit στην κατάσταση  $|+\rangle$ , όπως γνωρίζουμε. Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε στο qubit που βρίσκεται στην κατάσταση  $|+\rangle$  την πύλη Z:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

Έτσι, η κατάσταση  $|+\rangle$  αντιστρέφεται στην  $|-\rangle$ , όπως γνωρίζουμε για την πύλη Z (βλ. Εξίσωση 17.40). Τέλος, εφαρμόζουμε στην κατάσταση  $|-\rangle$  την πύλη H:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Επομένως, η εφαρμογή της σειράς πυλών HZH σε ένα qubit που βρίσκεται στην κατάσταση  $|0\rangle$  είναι ισοδύναμη με την εφαρμογή της πύλης X.

Ο αναγνώστης μπορεί να βρει άλλα τέτοια παραδείγματα στα Προβλήματα 8, 12, 15 και 16.

### 17.1.6 Πύλες που Δρουν σε Δύο Qubit

Στην Παράγραφο 17.1.3 περιγράφηκε ο τρόπος με τον οποίο αναπαρίστανται οι κβαντικοί καταχωρητές 2 qubit. Ουσιαστικά, οι πύλες που δρουν σε 2 qubit δρουν σε κβαντικούς καταχωρητές 2 qubit. Εδώ, θα εξετάσουμε δύο πύλες που δρουν σε 2 qubit: (1) την πύλη ελεγχόμενης άρνησης (Controlled NOT- CNOT) και (2) την πύλη εναλλαγής (SWAP). Οι δύο αυτές πύλες είναι χρήσιμες και για την υλοποίηση κβαντικών κυκλωμάτων, όπως θα δούμε στην επόμενη ενότητα.