

Κεφάλαιο 9

Έλεγχοι υποθέσεων

Εισαγωγή

- Ελέγχους υποθέσεων κάνουμε όταν παίρνουμε στατιστικά από δείγματα και στη συνέχεια βγάζουμε συμπεράσματα για τις αντίστοιχες παραμέτρους των πληθυσμών από τους οποίους προέρχονται αυτά τα δείγματα.
- Οι έλεγχοι δίνουν συμπεράσματα που αφορούν τον πληθυσμό και αυτά τα συμπεράσματα ισχύουν γενικά αλλά όχι απόλυτα.
- Υπάρχει μια μικρή πιθανότητα να πέφτουμε έξω. Συχνά αυτή προσδιορίζεται στο 5%.

Υποθέσεις

- Δημιουργούμε δύο μαθηματικές προτάσεις που ονομάζονται στατιστικές υποθέσεις ή απλά υποθέσεις
- Διατυπώνουμε δύο υποθέσεις, τη μηδενική που συνήθως εκφράζει ισότητα ή ομοιομορφία και την εναλλακτική που είναι μια εναλλακτική πρόταση
- Η εναλλακτική υπόθεση μπορεί να εκφράζει την μη ισότητα (τη διαφορά) και τότε έχουμε *δίπλευρο έλεγχο*. Ή μπορεί να εκφράζει ανισότητα (την περίπτωση του μικρότερου ή του μεγαλύτερου), οπότε έχουμε *μονόπλευρο έλεγχο*.
- Σε κάθε περίπτωση πάντα επιλέγουμε μία εναλλακτική υπόθεση, όχι και τις τρεις: διάφορο, μεγαλύτερο ή μικρότερο.
- Ο έλεγχος γίνεται ως προς την μηδενική υπόθεση. Δηλαδή πάντα ελέγχουμε αν ισχύει η μηδενική έναντι της εναλλακτικής. Απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση ή δεν την απορρίπτουμε.

Υποθέσεις

- Οι έλεγχοι υποθέσεων ονομάζονται και έλεγχοι σημαντικότητας.
- Οι ερωτήσεις με τις οποίες ασχολούμαστε είναι κατά πόσο, για παράδειγμα, οι μέσες τιμές δύο πληθυσμών είναι ίσες μεταξύ τους ή αν υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ τους.
- Στατιστικά σημαντική διαφορά είναι η διαφορά που τεκμηριώνεται με τη χρήση ενός στατιστικού (από το αποτέλεσμα ενός τύπου) όταν αυτό συγκρίνεται με μια κρίσιμη τιμή μιας στατιστικής κατανομής η οποία εξαρτάται από μια στάθμη σημαντικότητας α . Το α εκφράζει την πιθανότητα να κάνουμε λάθος αν απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση ενώ δεν έπρεπε. Η στάθμη σημαντικότητας α γράφεται και ως $\sigma\sigma\ \alpha$ και οι τιμές της είναι συνήθως 0,05 ή λιγότερο.

Έλεγχος σημαντικότητας για τη μέση τιμή (μεγάλα δείγματα)

- Μεγάλο τυχαίο δείγμα ($n > 30$) και η μεταβλητή X που μετράμε ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$.
- Τις παραμέτρους όμως αυτές μ και σ^2 της κανονικής κατανομής δεν τις γνωρίζουμε.
- Αυτό που γνωρίζουμε είναι το μέγεθος του δείγματος, τον μέσο όρο των παρατηρήσεων της μεταβλητής στο δείγμα και την δειγματική διασπορά.
- Βασισμένοι μόνο στα στατιστικά που έχουμε, θέλουμε να ελέγξουμε αν η μέση τιμή του πληθυσμού είναι ίση με μια συγκεκριμένη και δοσμένη τιμή μ_0 .

Έλεγχος σημαντικότητας για τη μέση τιμή (μεγάλα δείγματα)

- Υπολογίζουμε ή μας δίνεται ο μέσος όρος και η τυπική απόκλιση της X στο δείγμα, $\bar{x}$ και s αντίστοιχα.
- Η μηδενική υπόθεση είναι πάντα της ισότητας. Ως εναλλακτική μπορούμε να επιλέξουμε μία (μόνο μία) από τρεις: $\mu > \mu_0$, $\mu < \mu_0$ ή $\mu \neq \mu_0$. Αν επιλέξουμε μία από τις δύο πρώτες κάνουμε μονόπλευρο έλεγχο, αν επιλέξουμε την τελευταία κάνουμε δίπλευρο έλεγχο.
- Στον έλεγχο υποθέσεων κάνουμε τρία βήματα:
- Γράφουμε τις υποθέσεις, την μηδενική και την κατάλληλη εναλλακτική.
- Υπολογίζουμε ένα στατιστικό χρησιμοποιώντας έναν τύπο, βάσει του οποίου θα βγάλουμε συμπεράσματα.
- Ορίζουμε την απορριπτική περιοχή, δηλαδή συγκρίνουμε το στατιστικό που βρήκαμε στο προηγούμενο βήμα, με μια κρίσιμη τιμή (χρησιμοποιούμε γι' αυτόν τον λόγο την κατάλληλη θεωρητική κατανομή), και αν το στατιστικό την υπερβαίνει απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση.

Βήματα

- Βήμα 1)
- Γράφουμε τις κατάλληλες υποθέσεις, την μηδενική και μία από τις τρεις εναλλακτικές
- $H_0: \mu = \mu_0$
- $H_1: \mu > \mu_0$
- $\mu < \mu_0$
- $\mu \neq \mu_0$
- Βήμα 2)
- Υπολογίζουμε το στατιστικό z το οποίο ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή
- $$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$
- Βήμα 3)
- Επιλέγουμε μια στάθμη σημαντικότητας α (αν δεν μας δίνεται θεωρούμε $\alpha=0,05$)
- Αν η εναλλακτική είναι $H_1: \mu > \mu_0$ τότε απορρίπτουμε την H_0 αν $z > z_\alpha$
- Αν η εναλλακτική είναι $H_1: \mu < \mu_0$ τότε απορρίπτουμε την H_0 αν $z < -z_\alpha$ (δηλαδή στις περιπτώσεις 1 και 2 απορρίπτουμε την H_0 αν $|z| > z_\alpha$)
- Αν η εναλλακτική είναι $H_1: \mu \neq \mu_0$ απορρίπτουμε την H_0 αν $|z| > \frac{z_\alpha}{2}$
- Για το τελευταίο διαιρούμε το α στο μισό γιατί έχουμε δίπλευρο έλεγχο. Χωρίζουμε δηλαδή τη στάθμη σημαντικότητας σε δύο μισά.

Έλεγχος σημαντικότητας για τη μέση τιμή (μικρά δείγματα)

- Αν στην προηγούμενη περίπτωση έχουμε μικρό τυχαίο δείγμα ($n \leq 30$) και η μεταβλητή X που μετράμε ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$, τότε τα βήματα διαμορφώνονται ως εξής:
- Βήμα 1)
- Γραφούμε τις κατάλληλες υποθέσεις, την μηδενική και μία από τις τρεις εναλλακτικές
- $H_0: \mu = \mu_0$
- $H_1: \mu > \mu_0$
- $\mu < \mu_0$
- $\mu \neq \mu_0$

Έλεγχος σημαντικότητας για τη μέση τιμή (μικρά δείγματα)

- Βήμα 2)
- Υπολογίζουμε το στατιστικό t το οποίο ακολουθεί την κατανομή t του Student
- $$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$
- Βήμα 3)
- Επιλέγουμε μια στάθμη σημαντικότητας α (αν δεν μας δίνεται θεωρούμε $\alpha=0,05$)
- Αν $H_1: \mu > \mu_0$ τότε απορρίπτουμε την H_0 αν $t > t_{n-1;\alpha}$
- Αν $H_1: \mu < \mu_0$ τότε απορρίπτουμε την H_0 αν $t < -t_{n-1;\alpha}$ (δηλαδή στις περιπτώσεις 1 και 2 απορρίπτουμε την H_0 αν $|t| > t_{n-1;\alpha}$)
- Αν $H_1: \mu \neq \mu_0$ απορρίπτουμε την H_0 αν $|t| > t_{n-1;\frac{\alpha}{2}}$. Χωρίζουμε δηλαδή τη στάθμη σημαντικότητας σε δύο μισά, στις δύο ουρές της συμμετρικής κατανομής Student.

Παράδειγμα 9.1

- Ας υποθέσουμε ότι ο μέσος όρος της βαθμολογίας τυχαίου δείγματος 200 φοιτητών στο μάθημα της στατιστικής είναι 7,5 και η τυπική απόκλιση 3. Μέχρι πέρσι η μέση τιμή βαθμολογίας ήταν 8. Μπορούμε να πούμε σε $\alpha=2\%$ ότι η μέση τιμή της βαθμολογίας των φοιτητών στο μάθημα της στατιστικής έπεσε;
- Πώς θα δουλεύαμε αν το δείγμα είχε μέγεθος 20 άτομα;

Παράδειγμα 9.1

- Γραφούμε τις υποθέσεις
- $H_0: \mu = \mu_0$
- $H_1: \mu < \mu_0$
- ή
- $H_0: \mu = 8$
- $H_1: \mu < 8$
- Η εναλλακτική δηλώνει ότι ελέγχουμε αν η μέση τιμή έπεσε, σύμφωνα με το ερώτημα της άσκησης.

Παράδειγμα 9.1

- Στο πρώτο ερώτημα της άσκησης έχουμε μεγάλο δείγμα και θα πάρουμε κανονική κατανομή, ενώ στη δεύτερη περίπτωση με τα 20 άτομα θα χρησιμοποιήσουμε την κατανομή Student.
- Όταν λοιπόν $n=200$ υπολογίζουμε το στατιστικό z το οποίο ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή
- $$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{7,5 - 8}{\frac{3}{\sqrt{200}}} = -0,01179$$
- Επειδή $\alpha=0,02$ απορρίπτουμε την H_0 αν $z < -z_\alpha$
- Από το πίνακα της τυπικής κανονικής κατανομή $z_\alpha = z_{0,02} = 2,054$
- Και επειδή
- $z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{7,5 - 8}{\frac{3}{\sqrt{200}}} = -0,01179$ δεν είναι μικρότερο από το $-z_\alpha = -z_{0,02} = -2,054$
- δεν μπορούμε να απορρίψουμε την μηδενική υπόθεση. Δηλαδή δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η μέση βαθμολογία έπεσε. Με άλλα λόγια, μπορεί στο δείγμα να συμβαίνει κάτι τέτοιο αλλά αυτό δεν μπορούμε να το γενικεύσουμε για ολόκληρο τον πληθυσμό.

Παράδειγμα 9.1

- Αν τώρα είχαμε $n=20$ υπολογίζουμε το στατιστικό t το οποίο ακολουθεί την Student κατανομή (για μικρά δείγματα)
- $$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{7,5 - 8}{\frac{3}{\sqrt{20}}} = -0,03727$$
- Επειδή $\alpha=0,02$ απορρίπτουμε την H_0 αν $t < -t_{n-1;\alpha}$
- Το $t_{n-1;\alpha} = t_{20-1;0,02} = t_{19;0,02} = 2,205$
- Και επειδή
- $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{7,5 - 8}{\frac{3}{\sqrt{200}}} = -0,03727$ δεν είναι μικρότερο από το $-t_{n-1;\alpha} = -t_{19;0,02} = -2,205$
- δεν μπορούμε να απορρίψουμε την μηδενική υπόθεση, δηλαδή δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η μέση βαθμολογία έπεσε.
- Σημειώστε ότι αν για ένα μεγάλο δείγμα ($n=200$) δεν απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση τότε μάλλον δεν θα απορρίπτεται και για ένα μικρό δείγμα ($n=20$) χρησιμοποιώντας τα ίδια στατιστικά.

Έλεγχος σημαντικότητας για τη διασπορά

- Παίρνουμε ένα τυχαίο δείγμα με μέγεθος n , στο οποίο η μεταβλητή X που μετράμε ακολουθεί κανονική κατανομή. Υπολογίζουμε τη δειγματική διασπορά s^2 . Θέλουμε να ελέγξουμε αν η διασπορά του πληθυσμού ισούται με μια συγκεκριμένη τιμή έστω σ_0^2
- Βήμα 1)
- Γραφούμε τις κατάλληλες υποθέσεις, την μηδενική και μία από τις τρεις εναλλακτικές
- $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$
- $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$
- $\sigma^2 < \sigma_0^2$
- $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$
- Βήμα 2)
- Υπολογίζουμε το στατιστικό χ^2 το οποίο ακολουθεί την χ^2 κατανομή με $n-1$ βαθμούς ελευθερίας
- $\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$
- Βήμα 3)
- Επιλέγουμε μια στάθμη σημαντικότητας α (αν δεν μας δίνεται θεωρούμε $\alpha=0,05$)
- Αν η εναλλακτική είναι $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$ τότε απορρίπτουμε την H_0 αν $\chi^2 > \chi_{n-1;\alpha}^2$
- Αν η εναλλακτική είναι $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$ τότε απορρίπτουμε την H_0 αν $\chi^2 < \chi_{n-1;1-\alpha}^2$
- Αν η εναλλακτική είναι $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ τότε απορρίπτουμε την H_0 αν $\chi^2 > \chi_{n-1;\frac{\alpha}{2}}^2$ ή $\chi^2 < \chi_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}^2$

Έλεγχος σημαντικότητας για το p της δυωνυμικής κατανομής (μεγάλα δείγματα)

- Παίρνουμε ένα μεγάλο τυχαίο δείγμα στο οποίο η μεταβλητή X παίρνει την τιμή 0 ή 1 (αποτυχία ή επιτυχία). Υπολογίζουμε το ποσοστό p που επιθυμούμε (των «ευνοϊκών» περιπτώσεων ή επιτυχιών). Θέλουμε να ελέγξουμε αν η αντίστοιχη αναλογία στον πληθυσμό έχει μια συγκεκριμένη τιμή. Συχνά για να υπολογίσουμε το ποσοστό p υπολογίζουμε το $\frac{x}{n}$, διαιρούμε δηλαδή το πλήθος x των ευνοϊκών περιπτώσεων δια το μέγεθος του δείγματος n . Το δείγμα είναι συνήθως μεγάλο, δεδομένου ότι μιλάμε για ποσοστό και αναλογία. Αυτό σημαίνει ότι θα χρησιμοποιήσουμε την κανονική κατανομή.

Βήματα

- Βήμα 1)
- Γράφουμε τις κατάλληλες υποθέσεις, την μηδενική και μία από τις τρεις εναλλακτικές
- $H_0: p = p_0$
- $H_1: p > p_0$
- $p < p_0$
- $p \neq p_0$
- Βήμα 2)
- Υπολογίζουμε το στατιστικό
- $$z = \frac{\frac{x}{n} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$
-
- Βήμα 3)
- Επιλέγουμε μια στάθμη σημαντικότητας α (αν δεν μας δίνεται θεωρούμε $\alpha=0,05$)
- Αν η εναλλακτική είναι $H_1: p > p_0$ τότε απορρίπτουμε την H_0 αν $z > z_\alpha$
- Αν η εναλλακτική είναι $H_1: p < p_0$ τότε απορρίπτουμε την H_0 αν $z < -z_\alpha$
- Αν η εναλλακτική είναι $H_1: p \neq p_0$ τότε απορρίπτουμε την H_0 αν $|z| > z_{\frac{\alpha}{2}}$

Παράδειγμα 9.2

- Αν σε τυχαίο δείγμα με $n=1000$ έχουμε βρει ότι $x=300$ άτομα έχουν μια συγκεκριμένη άποψη, μπορούμε να πούμε σε στάθμη σημαντικότητας $\alpha=5\%$ ότι το αντίστοιχο ποσοστό (αναλογία) του πληθυσμού δεν διαφέρει από το 35% ;

Παράδειγμα 9.2

- $\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{300}{1000} = 0,30$
- Προσέξτε ότι γράφουμε δεκαδικούς αριθμούς και όχι ποσοστά. Διατυπώνουμε τις υποθέσεις, την μηδενική και την κατάλληλη εναλλακτική
- $H_0: p = 0,35$
- $H_1: p \neq 0,35$
- Υπολογίζουμε
- $$z = \frac{\frac{x}{n} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} z = \frac{0,30 - 0,35}{\sqrt{\frac{0,35(1-0,35)}{1000}}} = -3,31497$$
- Απορρίπτουμε την H_0 αν $|z| > z_{\frac{\alpha}{2}}$
- $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96$
- Βλέπουμε ότι όντως $|z| = 3,31497 > z_{\frac{\alpha}{2}}$
- Οπότε απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση. Η αναλογία διαφέρει από την τιμή 0,35=35%. Στις πράξεις καλό είναι να χρησιμοποιούμε ακρίβεια τεσσάρων ή και πέντε δεκαδικών όταν υπολογίζουμε ποσότητες με ποσοστά.

Σύγκριση των διασπορών δύο πληθυσμών

- Ενδιάμεσο στάδιο στον έλεγχο ισότητας μέσω τιμών σε μικρά δείγματα, τον οποίο θα δούμε παρακάτω.
- Παίρνουμε δύο ανεξάρτητα τυχαία δείγματα από πληθυσμούς στους οποίους η μεταβλητή X που μετράμε ακολουθεί κανονικές κατανομές. Υπολογίζουμε τις δειγματικές διασπορές s_1^2 και s_2^2 . Θέλουμε να ελέγξουμε αν οι διασπορές των δύο πληθυσμών σ_1^2, σ_2^2 είναι ίσες μεταξύ τους.
- Τις διαιρούμε, δεν τις αφαιρούμε.
- Βολεύει να υπολογίζουμε το στατιστικό $\frac{s_1^2}{s_2^2}$ βάζοντας στον αριθμητή τη μεγαλύτερη από τις δύο δειγματικές διασπορές. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι $s_1^2 > s_2^2$. Η s_1^2 θα μπει στον αριθμητή.

Βήματα

- Βήμα 1)
- Γράφουμε τις κατάλληλες υποθέσεις, τη μηδενική και μία από τις τρεις εναλλακτικές (στην πραγματικότητα αν υποθέσουμε ότι βάλαμε $s_1^2 > s_2^2$ οι εναλλακτικές είναι δύο, του διάφορου και του μεγαλύτερου). Ας δούμε πρώτα την εναλλακτική του μεγαλύτερου. Οι υποθέσεις είναι
- $H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$
- $H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1$
- Βήμα 2)
- Υπολογίζουμε το στατιστικό $\frac{s_1^2}{s_2^2}$ το οποίο ακολουθεί την F κατανομή με $n_1 - 1$ και $n_2 - 1$ βαθμούς ελευθερίας

Βήματα

- Βήμα 3)
- Επιλέγουμε μια στάθμη σημαντικότητας α (αν δεν μας δίνεται θεωρούμε $\alpha=0,05$).
- Απορρίπτουμε την H_0 όταν
- $\frac{s_1^2}{s_2^2} \geq F_{n_1-1, n_2-1; \alpha}$
- Αν είχαμε δίπλευρο έλεγχο, δηλαδή
- $H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$
- πράγμα που είναι πάρα πολύ συνηθισμένο, τότε απορρίπτουμε την H_0 όταν
- $\frac{s_1^2}{s_2^2} \geq F_{n_1-1, n_2-1; \frac{\alpha}{2}}$
- Θυμίζουμε ότι $s_1^2 > s_2^2$.

Έλεγχος σημαντικότητας για τη διαφορά δύο μέσων τιμών (μεγάλα δείγματα)

- Παίρνουμε δύο μεγάλα τυχαία και ανεξάρτητα δείγματα (το καθένα με πάνω από 30 παρατηρήσεις και όχι κατανάγκη ισοπληθή), στα οποία η μεταβλητή X που μετράμε ακολουθεί κανονικές κατανομές. Υπολογίζουμε τους μέσους όρους και τις τυπικές αποκλίσεις της X στα δύο δείγματα, ή μας δίνονται από την άσκηση.

1 ^ο δείγμα	2 ^ο δείγμα
Μέσος όρος $\bar{x}_1$	Μέσος όρος $\bar{x}_2$
Τυπική απόκλιση s_1	Τυπική απόκλιση s_2
Μέγεθος n_1	Μέγεθος n_2

Βήματα

- Βήμα 1)
- Γράφουμε τις κατάλληλες υποθέσεις, τη μηδενική και μία από τις τρεις εναλλακτικές
- $H_0: \mu_1 = \mu_2$
- $H_1: \mu_1 > \mu_2$
- $\mu_1 < \mu_2$
- $\mu_1 \neq \mu_2$
- Βήμα 2)
- Υπολογίζουμε το στατιστικό z το οποίο ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή
- $$z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$
- Βήμα 3)
- Επιλέγουμε μια στάθμη σημαντικότητας α (αν δεν μας δίνεται θεωρούμε $\alpha=0,05$)
- Αν η εναλλακτική είναι $H_1: \mu_1 > \mu_2$ τότε απορρίπτουμε την H_0 αν $z > z_\alpha$
- Αν η εναλλακτική είναι $H_1: \mu_1 < \mu_2$ τότε απορρίπτουμε την H_0 αν $z < -z_\alpha$
- Αν η εναλλακτική είναι $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ τότε απορρίπτουμε την H_0 αν $|z| > z_{\frac{\alpha}{2}}$

Παράδειγμα 9.3

- Ένας καθηγητής στατιστικής διδάσκει το ίδιο μάθημα υπό τις ίδιες συνθήκες σε δύο Τμήματα του Πανεπιστημίου. Στο τέλος του εξαμήνου παίρνει δύο τυχαία δείγματα, 100 φοιτητές από κάθε Τμήμα, και μελετά τους βαθμούς που έγραψαν οι φοιτητές των δύο Τμημάτων στις εξετάσεις του μαθήματος. Βρίσκει λοιπόν ο καθηγητής ότι το 1^ο Τμήμα έχει μέσο όρο 7 και τυπική απόκλιση 2 και το 2^ο Τμήμα μέσο όρο 8 και τυπική απόκλιση 3. Τι μπορεί να συμπεράνει συγκριτικά για την επίδοση των φοιτητών των δύο Τμημάτων;

Παράδειγμα 9.3

	1ο δείγμα	2ο δείγμα
Μέγεθος δείγματος	$n_1=100$	$n_2=100$
Μέσος όρος	$\bar{x}_1=7$	$\bar{x}_2=8$
Τυπική απόκλιση	$s_1=2$	$s_2=3$

Παράδειγμα 9.3

- Επειδή έχουμε μεγάλα δείγματα μπορούμε να εργαστούμε όπως περιγράψαμε. Η εναλλακτική υπόθεση είναι της διαφοράς. Επίσης θεωρούμε $\alpha=0,05$.
- $H_0: \mu_1 = \mu_2$
- $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$
- Υπολογίζουμε το στατιστικό z το οποίο ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή
- $$z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{7-8}{\sqrt{\frac{4}{100} + \frac{9}{100}}} = -2,7735$$
- Απορρίπτουμε την H_0 αν $|z| > z_{\frac{\alpha}{2}}$
- $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96$
- Και πράγματι $|z| > z_{\frac{\alpha}{2}}$ οπότε απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση της ισότητας.
Σε σσ $\alpha=5\%$ μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι μέσες τιμές διαφέρουν στατιστικά σημαντικά και το συμπέρασμα αυτό αφορά το σύνολο των φοιτητών των τμημάτων και όχι μόνο τα δείγματα που επιλέχτηκαν.

Έλεγχος σημαντικότητας για τη διαφορά δύο μέσων τιμών (μικρά δείγματα)

1 ^ο δείγμα	2 ^ο δείγμα
Μέσος όρος $\bar{x}_1$	Μέσος όρος $\bar{x}_2$
Τυπική απόκλιση s_1	Τυπική απόκλιση s_2
Μέγεθος n_1	Μέγεθος n_2

Βήματα

- Βήμα 1)
- Γράφουμε τις κατάλληλες υποθέσεις, τη μηδενική και μία από τις τρεις εναλλακτικές
- $H_0: \mu_1 = \mu_2$
- $H_1: \mu_1 > \mu_2$
- $\mu_1 < \mu_2$
- $\mu_1 \neq \mu_2$
- **Αν οι διασπορές των δύο πληθυσμών είναι ίσες τότε**
- Βήμα 2)
- Υπολογίζουμε το στατιστικό t το οποίο ακολουθεί την Student κατανομή
- $$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$
- όπου
- $$s = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$
- Βήμα 3)
- Επιλέγουμε μια στάθμη σημαντικότητας α (αν δεν μας δίνεται θεωρούμε $\alpha = 0,05$)
- Αν η εναλλακτική είναι $H_1: \mu_1 > \mu_2$ τότε απορρίπτουμε την H_0 αν $t > t_{n_1 + n_2 - 2; \alpha}$
- Αν η εναλλακτική είναι $H_1: \mu_1 < \mu_2$ τότε απορρίπτουμε την H_0 αν
- $t < -t_{n_1 + n_2 - 2; \alpha}$
- Αν η εναλλακτική είναι $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ τότε απορρίπτουμε την H_0 αν
- $|t| > t_{n_1 + n_2 - 2; \frac{\alpha}{2}}$

Βήματα

- Αν οι διασπορές είναι άνισες, τότε
- Βήμα 2)
- υπολογίζουμε το στατιστικό t το οποίο ακολουθεί την Student κατανομή

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

- Βήμα 3)
- Επιλέγουμε μια στάθμη σημαντικότητας α (αν δεν μας δίνεται θεωρούμε $\alpha=0,05$)
- Απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση αν

$$|t| > \frac{\frac{t_1 s_1^2}{n_1} + \frac{t_2 s_2^2}{n_2}}{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

- όπου t_1 είναι η $t_{n_1-1;\alpha}$ ή $t_{n_1-1;\frac{\alpha}{2}}$ ανάλογα αν το τεστ είναι μονόπλευρο ή δίπλευρο αντίστοιχα
- και t_2 είναι η $t_{n_2-1;\alpha}$ ή $t_{n_2-1;\frac{\alpha}{2}}$ ανάλογα αν το τεστ είναι μονόπλευρο ή δίπλευρο αντίστοιχα.

Παράδειγμα 9.4

- Ας ξαναδούμε το προηγούμενο παράδειγμα του καθηγητή στατιστικής. Ο καθηγητής στατιστικής διδάσκει το ίδιο μάθημα με τον ίδιο τρόπο σε δύο Τμήματα. Στο τέλος του εξαμήνου παίρνει δύο τυχαία δείγματα, 15 φοιτητές από κάθε Τμήμα, και μελετά τους βαθμούς που έγραψαν οι φοιτητές των δύο τμημάτων στις εξετάσεις του μαθήματος. Βρίσκει λοιπόν ο καθηγητής ότι το 1^ο Τμήμα έχει μέσο όρο 7 και τυπική απόκλιση 2 και το 2^ο Τμήμα μέσο όρο 8 και τυπική απόκλιση 3. Υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά της μέσης επίδοσης των δύο Τμημάτων;

Παράδειγμα 9.4

- Επειδή έχουμε μικρά δείγματα όπως έχουμε αναφέρει πρέπει πρώτα να γνωρίζουμε αν οι διασπορές των δύο πληθυσμών είναι ίσες μεταξύ τους. Γι αυτό πρώτα κάνουμε έλεγχο ισότητας των διαπορών

Παράδειγμα 9.4

- Γραφούμε τις υποθέσεις για τον έλεγχο ισότητας των διασπορών
- $H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$
- $H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$
- Υπολογίζουμε το στατιστικό $\frac{s_1^2}{s_2^2}$ θεωρώντας s_1^2 τη μεγαλύτερη από τις δύο διασπορές.
- $\frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4} = 2,25$
- το οποίο ακολουθεί την F κατανομή με $n_1 - 1$ και $n_2 - 1$ βαθμούς ελευθερίας, δηλαδή την F κατανομή με 14 και 14 βαθμούς ελευθερίας αφού $n_1 = n_2 = 15$.
- Θεωρούμε $\alpha=0,05$ και απορρίπτουμε την H_0 όταν
- $\frac{s_1^2}{s_2^2} \geq F_{n_1-1, n_2-1; \frac{\alpha}{2}}$
- Έχουμε $F_{n_1-1, n_2-1; \frac{\alpha}{2}} = F_{14, 14; 0,025} = 2,98$
- Επειδή $\frac{s_1^2}{s_2^2} = 2,25$ δεν είναι μεγαλύτερο από 2,98 δεν μπορούμε να απορρίψουμε την μηδενική υπόθεση της ισότητας των διασπορών. Θεωρούμε λοιπόν ότι οι διασπορές δεν διαφέρουν.

Παράδειγμα 9.4

- προχωρούμε στον έλεγχο ισότητας των μέσων τιμών
- $H_0: \mu_1 = \mu_2$
- $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$
- όπου μ_i είναι οι μέσες τιμές των βαθμολογιών των πληθυσμών των δύο τμημάτων.
- Υπολογίζουμε το
- $$s = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}} = \sqrt{\frac{(15-1)9 + (15-1)4}{15+15-2}} = 2,55$$
- Μετά υπολογίζουμε το στατιστικό t το οποίο ακολουθεί την Student κατανομή
- $$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{8-7}{2,55 \sqrt{\frac{1}{15} + \frac{1}{15}}} = 1,07$$
- Απορρίπτουμε την H_0 αν $|t| > t_{n_1+n_2-2; \frac{\alpha}{2}}$
- $t_{n_1+n_2-2; \frac{\alpha}{2}} = t_{28; 0,025} = 2,048$
- Επειδή $|1,07|$ δεν είναι μεγαλύτερο από το 2,048 δεν απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση, άρα δεν υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά των μέσων τιμών.

Τι θα κάναμε αν βρίσκαμε ότι η διασπορές ήταν άνισες;

- $H_0: \mu_1 = \mu_2$
- $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$
- Υπολογίζουμε το στατιστικό t το οποίο ακολουθεί την Student κατανομή
- $t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{8-7}{\sqrt{\frac{9}{15} + \frac{4}{15}}} = 1,074$
- Θεωρούμε $\alpha=0,05$ και απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση αν
- $|t| > \frac{\frac{t_1 s_1^2}{n_1} + \frac{t_2 s_2^2}{n_2}}{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$
- όπου t_1 είναι η $t_{n_1-1; \frac{\alpha}{2}} = t_{14; 0,025} = 2,145$
- και t_2 είναι η $t_{n_2-1; \frac{\alpha}{2}} = t_{14; 0,025} = 2,145$
- άρα υπολογίζουμε
- $\frac{\frac{t_1 s_1^2}{n_1} + \frac{t_2 s_2^2}{n_2}}{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} = \frac{\frac{2,145 \cdot 9}{15} + \frac{2,145 \cdot 4}{15}}{\frac{9}{15} + \frac{4}{15}} = 2,145$
- Ειδικά στην άσκηση μας το αποτέλεσμα είναι βολικό στο υπολογισμό λόγω απλοποίησης, γιατί τα δύο δείγματα έχουν ίδιο μέγεθος. Επειδή $|1,074|$ δεν είναι μεγαλύτερο από 2,145 δεν απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση της ισότητας των μέσων τιμών και για την περίπτωση που οι διασπορές θα ήταν άνισες.

**Έλεγχος σημαντικότητας για τη σύγκριση μέσων τιμών.
Παρατηρήσεις σε ζεύγη (ζευγαρωτές παρατηρήσεις)**

- Οι παρατηρήσεις κατά ζεύγη, ή αλλιώς ζευγαρωτές παρατηρήσεις, αναφέρονται σε μετρήσεις στο ίδιο δείγμα σε δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές ή σε μετρήσεις σε δύο δείγματα που είναι μεταξύ τους εξαρτημένα. Υποθέτουμε βέβαια ότι τα δείγματα είναι τυχαία και επιλέγονται από κανονικούς πληθυσμούς.
- Συνήθως το δείγμα είναι μικρό ($n \leq 30$) και έτσι χρησιμοποιούμε την κατανομή t του Student

Ζευγαρωτές παρατηρήσεις

Αριθμός παρατήρησης	Πριν Χ	Μετά Υ	Διαφορά $Z=X-Y$
1	x_1	y_1	$z_1 = x_1 - y_1$
2	x_2	y_2	$z_2 = x_2 - y_2$
3	x_3	y_3	$z_3 = x_3 - y_3$
.	.	.	.
.	.	.	.
n-1	x_{n-1}	y_{n-1}	$z_{n-1} = x_{n-1} - y_{n-1}$
n	x_n	y_n	$z_n = x_n - y_n$

Βήματα

- Υπολογίζουμε το μέσο της όρο και την τυπική απόκλιση της Z
- $\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^n z_i}{n},$
- $s_Z = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum z_i^2 - \frac{(\sum z_i)^2}{n}}{n-1}}$
- Βήμα 1)
- Γράφουμε τις κατάλληλες υποθέσεις, την μηδενική και μία από τις τρεις εναλλακτικές
- $H_0: \mu_1 = \mu_2$
- $H_1: \mu_1 > \mu_2$
- $\mu_1 < \mu_2$
- $\mu_1 \neq \mu_2$
- όπου μ_1 είναι η μέση τιμή για τον πληθυσμό πριν και μ_2 είναι η μέση τιμή για τον πληθυσμό μετά.

Βήματα

- Βήμα 2)
- Υπολογίζουμε το στατιστικό t το οποίο ακολουθεί την Student κατανομή
- $$t = \frac{\bar{z}}{\frac{s_z}{\sqrt{n}}}$$
- Βήμα 3)
- Επιλέγουμε μια στάθμη σημαντικότητας α (αν δεν μας δίνεται θεωρούμε $\alpha=0,05$)
- Αν η εναλλακτική είναι η $H_1: \mu_1 > \mu_2$ τότε απορρίπτουμε την H_0 αν $t > t_{n-1;\alpha}$
- Αν η εναλλακτική είναι η $H_1: \mu_1 < \mu_2$ τότε απορρίπτουμε την H_0 αν $t < -t_{n-1;\alpha}$
- Αν η εναλλακτική είναι η $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ τότε απορρίπτουμε την H_0 αν $|t| > t_{n-1;\frac{\alpha}{2}}$

Παράδειγμα 9.5

- Ένας γιατρός έχει 10 υπερτασικούς ασθενείς και θέλει να δοκιμάσει ένα φάρμακο για την πίεση. Μετρά την πίεση των ασθενών και στη συνέχεια οι ασθενείς αρχίζουν θεραπεία με καθημερινή χορήγηση του φαρμάκου για ένα μήνα. Στο τέλος του μήνα ο γιατρός ξαναμετρά την πίεσή τους. Οι μετρήσεις δίνονται στον παρακάτω πίνακα. Βελτιώθηκαν οι μετρήσεις των ασθενών;

Παράδειγμα 9.5

Ασθενής	Μέτρηση πριν	Μέτρηση μετά
1	15	12
2	16	15
3	15	13
4	15	12
5	16	13
6	16	16
7	15	16
8	18	15
9	16	13
10	17	12

Παράδειγμα 9.5

Ασθενής	Μέτρηση πριν	Μέτρηση μετά	Διαφορά
1	15	12	3
2	16	15	1
3	15	13	2
4	15	12	3
5	16	13	3
6	16	16	0
7	15	16	-1
8	18	15	3
9	16	13	3
10	17	12	5

Παράδειγμα 9.5

Ασθενής	Διαφορά z	z^2
1	3	9
2	1	1
3	2	4
4	3	9
5	3	9
6	0	0
7	-1	1
8	3	9
9	3	9
10	5	25
Άθροισμα	$\sum_{i=1}^n z_i = 22$	$\sum z_i^2 = 76$

Παράδειγμα 9.5

- $\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^n z_i}{n} = \frac{22}{10} = 2,2$
- $s_Z = \sqrt{\frac{\sum z_i^2 - \frac{(\sum z_i)^2}{n}}{n-1}} = \sqrt{\frac{76 - \frac{22^2}{10}}{9}} = 1,75$
- Βελτιώθηκαν σημαίνει ότι μειώθηκαν μετά τη χορήγηση του φαρμάκου, οπότε οι υποθέσεις μας είναι
- $H_0: \mu_1 = \mu_2$
- $H_1: \mu_1 > \mu_2$
- Υπολογίζουμε το στατιστικό t το οποίο ακολουθεί την Student κατανομή
- $t = \frac{\bar{z}}{\frac{s_Z}{\sqrt{n}}} = \frac{2,2}{\frac{1,75}{\sqrt{10}}} = 3,98$
- θεωρούμε $\alpha=0,05$
- $t_{n-1;\alpha} = t_{9;0,05} = 1,833$
- Απορρίπτουμε την H_0 αν $t > t_{n-1;\alpha}$ πράγμα που ισχύει γιατί $3,98 > 1,833$. Άρα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η μετρήσεις των ασθενών βελτιώθηκαν σε $\alpha=0,05$.

Έλεγχος σημαντικότητας για τη σύγκριση δύο αναλογιών

- x είναι ο αριθμός των ευνοϊκών περιπτώσεων για το πρώτο δείγμα και n_1 το μέγεθος του δείγματος, ενώ y είναι ο αριθμός των ευνοϊκών περιπτώσεων για το δεύτερο δείγμα και n_2 είναι το μέγεθος του δεύτερου δείγματος.
- Βήμα 1)
- Γραφούμε τις κατάλληλες υποθέσεις, την μηδενική και μία από τις τρεις εναλλακτικές
- $H_0: p_1 = p_2$
- $H_1: p_1 > p_2$
- $p_1 < p_2$
- $p_1 \neq p_2$
- Βήμα 2)
- Υπολογίζουμε το στατιστικό z το οποίο ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή
- $$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$
- όπου
- $\hat{p}_1 = \frac{x}{n_1}$
- $\hat{p}_2 = \frac{y}{n_2}$
- $\hat{p} = \frac{x+y}{n_1+n_2}$

Συνέχεια

- Βήμα 3)
- Επιλέγουμε μια στάθμη σημαντικότητας α (αν δεν μας δίνεται θεωρούμε $\alpha=0,05$)
- Αν η εναλλακτική είναι η $H_1: p_1 > p_2$ τότε απορρίπτουμε την H_0 αν $z > z_\alpha$
- Αν η εναλλακτική είναι η $H_1: p_1 < p_2$ τότε απορρίπτουμε την H_0 αν $z < -z_\alpha$
- Αν η εναλλακτική είναι η $H_1: p_1 \neq p_2$ τότε απορρίπτουμε την H_0 αν $|z| > \frac{z_\alpha}{2}$

Παράδειγμα 9.6

- Μια εταιρία δημοσκοπήσεων πραγματοποιεί μια πανελλαδική δημοσκόπηση με συνολικό δείγμα $n=1000$. Το δείγμα αποτελείται από δύο τυχαία υποδείγματα, τα 600 άτομα είναι το δείγμα που αντιστοιχεί στις αστικές περιοχές και τα υπόλοιπα 400 στις αγροτικές. Στην έρευνα μετριέται ποιο είναι το ποσοστό που θα έπαιρνε το κόμμα Α αν αύριο γινόταν εκλογές. Το ποσοστό αυτό είναι για το δείγμα των αστικών περιοχών 30% και για το δείγμα των αγροτικών περιοχών 27%. Υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά ανάμεσα στα ποσοστά των αστικών και αγροτικών περιοχών;

Παράδειγμα 9.6

- $H_0: p_1 = p_2$
- $H_1: p_1 \neq p_2$
- και $\alpha=0,05$
- $\hat{p}_1 = \frac{x}{n_1} = 0,30 \Rightarrow x = 0,30 \cdot n_1 = 0,30 \cdot 600 = 180$
- $\hat{p}_2 = \frac{y}{n_2} = 0,27 \Rightarrow y = 0,27 \cdot n_2 = 0,27 \cdot 400 = 108$
- $\hat{p} = \frac{x+y}{n_1+n_2} = \frac{180+108}{1000} = 0,288$
- Υπολογίζουμε το στατιστικό z το οποίο ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή
- $$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} = \frac{0,30 - 0,27}{\sqrt{0,288(1-0,288)(\frac{1}{600} + \frac{1}{400})}} = 1,026$$
- Απορρίπτουμε την H_0 αν $|z| > \frac{z_{\alpha}}{2}$
- $\frac{z_{\alpha}}{2} = z_{0,025} = 1,96$
- Επειδή $|z| = 1,026$ δεν είναι μεγαλύτερο από το 1,96 δεν μπορούμε να απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση, δηλαδή δεν υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά ανάμεσα τα ποσοστά των αστικών και των αγροτικών περιοχών. Παρατηρήστε ότι τα ποσοστά γράφονται στον τύπο ως δεκαδικοί αριθμοί.

Έλεγχος ανεξαρτησίας δύο κατηγορικών μεταβλητών. Έλεγχος χ^2

- Έστω ότι έχουμε δύο κατηγορικές μεταβλητές με m και n κατηγορίες η κάθε μία. Τότε μπορούμε να σχηματίσουμε έναν πίνακα διπλής εισόδου, των δύο μεταβλητών με m γραμμές και n στήλες. Στα κελιά του πίνακα τοποθετούνται οι *Παρατηρούμενες συχνότητες* που τις συμβολίζουμε με O (Observed frequencies).
- Μας ενδιαφέρει να ελέγξουμε αν οι δύο μεταβλητές είναι μεταξύ τους εξαρτημένες ή ανεξάρτητες.

Παράδειγμα 9.7

- Η μία μεταβλητή είναι το φύλο των ψηφοφόρων με τιμές-κατηγορίες Άνδρες και Γυναίκες, και η άλλη μεταβλητή είναι το κόμμα που ψηφίζουν, ας υποθέσουμε με τρεις κατηγορίες, τρία κόμματα K1, K2 και K3 (βλ. και Παράδειγμα 4.8). Ο πίνακας διπλής εισόδου παρακάτω δείχνει ποια κόμματα επιλέγουν οι άντρες και ποια οι γυναίκες.
- Το ερώτημα που θα αντιμετωπίσουμε με έλεγχο υποθέσεων είναι αν το φύλο και η κομματική προτίμηση είναι μεταξύ τους εξαρτημένα. Με μια διαφορετική διατύπωση ρωτάμε αν το φύλο παίζει ρόλο στην κομματική προτίμηση, ή αν η κομματική προτίμηση εξαρτάται από το φύλο.

	K1	K2	K3
Άνδρες	320	140	60
Γυναίκες	280	130	70

Παράδειγμα 9.7

- Ο πίνακας έχει 6 κελιά (2 γραμμές επί 3 στήλες). Ας τον περιγράψουμε παρακάτω.

	K1	K2	K3	σύνολο	
A	320	140	60	520	
Γ	280	130	70	480	
σύνολο	600	270	130	1000	Γενικό σύνολο

Παράδειγμα 9.7

- Αν τώρα τα A και B είναι ανεξάρτητα θα πρέπει βάσει του τύπου $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ η συχνότητα στο κελί να είναι
- $1000 \cdot P(A) \cdot P(B)$
- Δηλαδή αλλάξαμε το $P(A \cap B)$ με $P(A) \cdot P(B)$
- Άρα για κάθε κελί υπολογίζουμε το $1000 \cdot P(A) \cdot P(B)$
- το οποίο είναι
- $1000 \cdot P(A) \cdot P(B) = 1000 \cdot \frac{n(A)}{1000} \cdot \frac{n(B)}{1000} = \frac{n(A) \cdot n(B)}{1000}$
- όπου $n(A)$ και $n(B)$ οι περιθώριες συχνότητες των A και B (οι συχνότητές τους).
- Αυτό το κάνουμε και για τα 6 κελιά του πίνακα.

Παράδειγμα 9.7

	Κ1	Κ2	Κ3	σύνολο	
Α	$\frac{520 \cdot 600}{1000}$	$\frac{520 \cdot 270}{1000}$	$\frac{520 \cdot 130}{1000}$	520	
Γ	$\frac{480 \cdot 600}{1000}$	$\frac{480 \cdot 270}{1000}$	$\frac{480 \cdot 130}{1000}$	480	
σύνολο	600	270	130	1000	Γενικό σύνολο

Παράδειγμα 9.7

- Δηλαδή ο πίνακας εμφανίζει έξι νέες συχνότητες που εκφράζουν πώς θα ήταν ο πίνακας αν είχαμε ανεξαρτησία. Αυτές ονομάζονται *Αναμενόμενες συχνότητες*, συμβολίζονται με E (Expected frequencies), και μπορεί να είναι δεκαδικοί αριθμοί.

	K1	K2	K3	σύνολο
A	312	140,4	67,6	520
Γ	288	129,6	62,4	480
σύνολο	600	270	130	1000

Παράδειγμα 9.7

Παρατηρούμενες συχνότητες O_{ij}	Αναμενόμενες συχνότητες E_{ij}	$O_{ij} - E_{ij}$	$(O_{ij} - E_{ij})^2$	$\frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$
320	312	8	64	0,205128
140	140,4	-0,4	0,16	0,00114
60	67,6	-7,6	57,76	0,854438
280	288	-8	64	0,222222
130	129,6	0,4	0,16	0,001235
70	62,4	7,6	57,76	0,925641
			Σύνολο	2,209803

Παράδειγμα 9.7

- $\chi^2 = \sum \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} = 2,209803$
- Το άθροισμα της τελευταίας στήλης μας δίνει μια ένδειξη του πόσο διαφοροποιούνται-απέχουν συνολικά οι παρατηρούμενες συχνότητες από τις αναμενόμενες, η πραγματικότητα από την ανεξαρτησία. Το 2,209803 είναι πολύ ή λίγο;
- Το μικρό ή το μεγάλο είναι έννοιες σχετικές. Για να το απαντήσουμε θα πρέπει να συγκρίνουμε την ποσότητα αυτή με όλες τις αντίστοιχες ποσότητες που θα μπορούσαν να παραχθούν. Και ενώ δεν μπορούμε να τις υπολογίσουμε όλες, μπορούμε ωστόσο να γνωρίζουμε θεωρητικά από πού μέχρι πού μπορούν αυτές να κυμαίνονται και με ποια πυκνότητα, ώστε στη συνέχεια να μπορούμε να γνωρίζουμε πού τοποθετείται η συγκεκριμένη ποσότητα, ποια είναι η σχετική θέση της.

Βαθμοί ελευθερίας

- Δηλαδή βαθμοί ελευθερίας είναι ο ελάχιστος αριθμός παρατηρούμενων συχνοτήτων που πρέπει να γνωρίζουμε ώστε να είναι προσδιορισμένος ο πίνακας συνάφειας. Οι βαθμοί ελευθερίας είναι συνώνυμοι του μεγέθους ενός πίνακα.
- Το πλήθος τους είναι $(R - 1) \cdot (C - 1)$ όπου R είναι ο αριθμός των γραμμών και C ο αριθμός των στηλών του πίνακα συνάφειας. Δηλαδή στην περίπτωση μας είναι
- $\beta\epsilon = (R - 1) \cdot (C - 1) = (2 - 1) \cdot (3 - 1) = 2$

Παράδειγμα 9.7

- H_0 : το φύλο και η κομματική προτίμηση είναι ανεξάρτητα
- H_1 : το φύλο και η κομματική προτίμηση είναι εξαρτημένα
- Υπολογίζουμε $\chi^2 = \sum \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$ βάσει του πίνακα υπολογισμών (βλ. παραπάνω)
- $\chi^2 = \sum \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} = 2,209803$
- Οπότε για $\alpha=0,05$ δηλαδή για στάθμη σημαντικότητας 5% υπολογίζουμε το $\chi^2_{2,0,05}$ Γενικά, υπολογίζουμε το $\chi^2_{k;\alpha}$ δηλαδή την κρίσιμη τιμή της κατανομής με k βαθμούς ελευθερίας (αυτούς του πίνακα συνάφειας) και στάθμη ή επίπεδο σημαντικότητας α . Αν $\chi^2 > \chi^2_{k;\alpha}$ τότε απορρίπτουμε την H_0 της ανεξαρτησίας και δεχόμαστε ότι οι μεταβλητές είναι εξαρτημένες σε σσ α .
- Οπότε στην περίπτωση μας $\chi^2_{k;\alpha} = \chi^2_{2,0,05} = 5,99$ και
- $\chi^2 = \sum \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} = 2,209803$
- Επειδή το χ^2 δεν είναι μεγαλύτερο από το 5,99 δεν μπορούμε να απορρίψουμε την μηδενική υπόθεση. Άρα δεχόμαστε ότι το φύλο και η κομματική προτίμηση είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους .

Παράδειγμα 9.8

- Βασισμένοι σε δεδομένα από μία δημοσκόπηση, δημιουργήσαμε τον παρακάτω πίνακα συνάφειας. Ο πίνακας συνδέει τις μεταβλητές περιοχή διαμονής (αστική ή αγροτική) των πολιτών και την άποψή τους ως προς ένα θέμα. Η άποψη μπορεί να είναι θετική, αρνητική ή ουδέτερη. Ο πίνακας περιγράφεται παρακάτω. Είναι η περιοχή και η άποψη μεταξύ τους ανεξάρτητες;

	Θετική άποψη	Αρνητική άποψη	Ουδέτερη άποψη	σύνολο	
Αστική	560	320	170	1050	
Αγροτική	230	460	100	790	
σύνολο	790	780	270	1840	Γενικό σύνολο

Παράδειγμα 9.8

- Πρώτα γράφουμε τις υποθέσεις
- H_0 : η περιοχή και η άποψη είναι ανεξάρτητες
- H_1 : η περιοχή και η άποψη είναι εξαρτημένες
- Στην συνέχεια τα βήματα είναι:
- υπολογίζουμε τις αναμενόμενες συχνότητες
- σχηματίζουμε τον πίνακα υπολογισμών και υπολογίζουμε το χ^2
- υπολογίζουμε τους βαθμούς ελευθερίας και συγκρίνουμε το χ^2 με την κρίσιμη τιμή ώστε να ορίσουμε την απορριπτική περιοχή.
- Υπολογίζουμε τις αναμενόμενες συχνότητες

Παράδειγμα 9.8

	Θετική άποψη	Αρνητική άποψη	Ουδέτερη άποψη	σύνολο	
Αστική	$\frac{1050 \cdot 790}{1840}$	$\frac{1050 \cdot 780}{1840}$	$\frac{1050 \cdot 270}{1840}$	1050	
Αγροτική	$\frac{790 \cdot 790}{1840}$	$\frac{790 \cdot 780}{1840}$	$\frac{790 \cdot 270}{1840}$	790	
σύνολο	790	780	270	1840	Γενικό σύνολο

Παράδειγμα 9.8

	Θετική άποψη	Αρνητική άποψη	Ουδέτερη άποψη	σύνολο	
Αστική	450,8	445,1	154,1	1050	
Αγροτική	339,2	334,9	115,9	790	
σύνολο	790	780	270	1840	Γενικό σύνολο

Δημιουργούμε τον πίνακα υπολογισμού

Παρατηρούμεν ες συχνότητες O_{ij}	Αναμενόμενες συχνότητες E_{ij}	$O_{ij} - E_{ij}$	$(O_{ij} - E_{ij})^2$	$\frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$
560	450,8	109,2	11921,32	26,44391
320	445,1	-125,1	15652,19	35,16486
170	154,1	15,9	253,571	1,645752
230	339,2	-109,2	11921,32	35,14697
460	334,9	125,1	15652,19	46,73811
100	115,9	-15,9	253,571	2,187392
			Σύνολο	147,327

Παράδειγμα 9.8

- $\chi^2 = \sum \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} = 147,327$
- Οι βαθμοί ελευθερίας είναι
- $\beta\epsilon = (R - 1) \cdot (C - 1) = (2 - 1) \cdot (3 - 1) = 2$
- Οπότε συγκρίνουμε το
- $\chi^2 = 147,327$ με το $\chi^2_{k;\alpha} = \chi^2_{2;0,05} = 5,99$
- Επειδή $\chi^2 > \chi^2_{2;0,05}$ απορρίπτουμε την H_0 . Δηλαδή η περιοχή και η άποψη είναι εξαρτημένες μεταξύ τους σε σσ $\alpha=0,05$.
- Για κάποιο άλλο επίπεδο ή στάθμη σημαντικότητας α , θα υπολογίζαμε την αντίστοιχη κρίσιμη τιμή $\chi^2_{k;\alpha}$ και θα κάναμε πάλι τη σύγκριση που θα μας οδηγούσε σε απόρριψη ή μη απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης.

Ανάλυση διακύμανσης με έναν παράγοντα (ANOVA)

- Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι παρατηρήσεις τριών δειγμάτων της μεταβλητής X που μετρά τη βαθμολογία φοιτητών σε κάποιο μάθημα. Τα τρία δείγματα προέρχονται από τους τρεις πληθυσμούς φοιτητών τριών Τμημάτων του Πανεπιστημίου, δεν έχουν ίσο μέγεθος (αν και θα μπορούσαν να έχουν), η βαθμολογία κατανέμεται κανονικά και στους τρεις πληθυσμούς και οι τρεις διασπορές της είναι ίσες μεταξύ τους.
- Να ελεγχθεί αν η μέση βαθμολογία των τριών Τμημάτων διαφέρει μεταξύ τους.

Ανάλυση διακύμανσης

Δείγμα 1	Δείγμα 2	Δείγμα 3
5	9	6
6	8	6
6	6	5
7	8	5
8	8	7
8	8	8
6	9	7
6	9	6
5		6
8		

Ανάλυση διακύμανσης

- Παρατηρούμε από τον πίνακα του παραδείγματος ότι το πρώτο δείγμα έχει μέγεθος $n_1 = 10$, το δεύτερο $n_2 = 8$ και το τρίτο $n_3 = 9$.
- Το πρώτο που κάνουμε είναι να γράψουμε τις υποθέσεις για τις μέσες τιμές βαθμολογίας των τριών Τμημάτων.
- $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$
- H_1 : οι μέσες τιμές διαφέρουν
- Στη συνέχεια παίρνουμε τον πίνακα των δεδομένων και τον αναπτύσσουμε ως εξής:
- Υπολογίζουμε τα αθροίσματα T_1, T_2, T_3 των παρατηρήσεων για κάθε δείγμα και το συνολικό ή Γενικό άθροισμα των παρατηρήσεων
- $T = T_1 + T_2 + T_3$

Ανάλυση διακύμανσης

- Υπολογίζουμε επίσης τους μέσους όρους, έναν για κάθε δείγμα και το *Γενικό μέσο όρο* από το Γενικό άθροισμα:
- $\bar{X}_1 = \frac{T_1}{n_1}$
- $\bar{X}_2 = \frac{T_2}{n_2}$
- $\bar{X}_3 = \frac{T_3}{n_3}$
- Ο Γενικός μέσος όρος είναι
- $\bar{X} = \frac{T}{n_1+n_2+n_3}$

Ο πίνακας των δεδομένων

	Δείγμα 1	Δείγμα 2	Δείγμα 3	
	5	9	6	
	6	8	6	
	6	6	5	
	7	8	5	
	8	8	7	
	8	8	8	
	6	9	7	
	6	9	6	
	5		6	
	8			
αθροίςμα τα	$T_1=65$	$T_2=65$	$T_3=56$	Γενικό άθροισμα= $T=T_1+T_2+T_3=186$
Μέσοι όροι	$\bar{x}_1=65/10=$ 6,5	$\bar{x}_2=65/8=8,1$ 3	$\bar{x}_3=56/9=6,$ 22	Γενικός μέσος όρος $\bar{x}=186/(10+8+9)=6,89$

Ανάλυση διακύμανσης

- τα τρία δείγματα, το σύνολο των παρατηρήσεων (συνολικά και τα τρία δείγματα ενωμένα σε ένα δείγμα), και τους μέσους όρους των τριών δειγμάτων που συνιστούν ένα νέο δείγμα που έχει τρεις παρατηρήσεις. Υπολογίζουμε πρώτα τα αθροίσματα τετραγώνων SS_T στο σύνολο (Total) των 27 παρατηρήσεων (τα τρία δείγματα συνολικά).
- $SS_T = \sum (x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum x_{ij}^2 - \frac{(\sum x_{ij})^2}{n} = \sum x_{ij}^2 - \frac{T^2}{n}$
- όπου n είναι μέγεθος του συνολικού δείγματος που προκύπτει παίρνοντας όλα τα δείγματα μαζί σε ένα.
- Στη συνέχεια υπολογίζουμε το άθροισμα τετραγώνων εντός (Within) των δειγμάτων-ομάδων SS_W . Είναι το άθροισμα τετραγώνων των διαφορών των παρατηρήσεων κάθε δείγματος από το μέσο του κάθε δείγματος και αθροιστικά και για τα τρία δείγματα
- $SS_W = \sum (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 = \sum x_{ij}^2 - \sum \frac{T_i^2}{n_i}$
- όπου n_i είναι τα μεγέθη των δειγμάτων. Για τα αθροίσματα τετραγώνων αποδεικνύεται ότι
- $SS_T = SS_B + SS_W$
- οπότε το άθροισμα τετραγώνων μεταξύ (Between) των δειγμάτων-ομάδων, SS_B ισούται με
- $SS_B = SS_T - SS_W$

Οι βαθμοί ελευθερίας

Άθροισμα τετραγώνων	Βαθμοί ελευθερίας
SS_T	$n-1$
SS_B	$k-1$
SS_W	$n-k$

Υπολογισμοί

- Υπολογίζουμε τα μέσα αθροίσματα τετραγώνων που είναι τα αθροίσματα τετραγώνων διαιρεμένα με τους βαθμούς ελευθερίας τους. Είναι στη ουσία οι διασπορές:
- $\frac{SS_B}{k-1}$
- $\frac{SS_W}{n-k}$
- Αφού τα υπολογίσουμε, τα διαιρούμε ορίζοντας ως F τον λόγο τους:
- $F = \frac{\frac{SS_B}{k-1}}{\frac{SS_W}{n-k}}$

Συμπέρασμα

- Όσο πιο «απομακρυσμένα» (με μεγάλη διασπορά ανάμεσά τους, $\frac{SS_B}{k-1}$) είναι τα δείγματα και παράλληλα όσο πιο «συμπαγή» (με μικρή εσωτερική διασπορά, $\frac{SS_W}{n-k}$) είναι τα δείγματα, τόσο περισσότερο διαφέρουν και το F μεγαλώνει. Το F ακολουθεί την $F_{k-1, n-k}$ κατανομή. Συγκρίνουμε το F με την κρίσιμη τιμή $F_{k-1, n-k; \alpha}$ και αν το F είναι μεγαλύτερο, τότε απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση σε στάθμη σημαντικότητας α (που συχνά είναι $5\%=0,05$). Τον λόγο F που υπολογίσαμε τον γράφουμε ως εξής: $F(k-1, n-k)=F$.

Ο πίνακας της ανάλυσης διακύμανσης (ANOVA)

Αθροίσματα τετραγώνων	Βαθμοί ελευθερίας	Μέσα τετράγωνα (διασπορές)	F
Μεταξύ των ομάδων SS_B	k-1	$\frac{SS_B}{k-1}$	$F = \frac{\frac{SS_B}{k-1}}{\frac{SS_W}{n-k}}$
Εντός των ομάδων SS_W	n-k	$\frac{SS_W}{n-k}$	
Συνολικά SS_T	n-1		

Εφαρμογή

			τετράγωνα		
Δείγμα 1	Δείγμα 2	Δείγμα 3	Δείγμα 1	Δείγμα 2	Δείγμα 3
5	9	6	25	81	36
6	8	6	36	64	36
6	6	5	36	36	25
7	8	5	49	64	25
8	8	7	64	64	49
8	8	8	64	64	64
6	9	7	36	81	49
6	9	6	36	81	36
5		6	25		36
8			64		

Εφαρμογή

- $\sum x_{ij}^2 = 1326$
- Έχουμε λοιπόν
- $SS_T = \sum x_{ij}^2 - \frac{T^2}{n} = 1326 - \frac{186^2}{27} = 44,7$
- $SS_W = \sum (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 =$
 $\sum x_{ij}^2 - \sum \frac{T_i^2}{n_i} = 1326 - \left(\frac{65^2}{10} + \frac{65^2}{8} + \frac{56^2}{9} \right) = 27$
- $SS_B = SS_T - SS_W = 44,7 - 27 = 17,7$

Εφαρμογή

- Οι βαθμοί ελευθερίας είναι

Αθροίσματα τετραγώνων	Βαθμοί ελευθερίας
SS_T	$n-1=27-1=26$
SS_B	$k-1=3-1=2$
SS_W	$n-k=27-3=24$

Εφαρμογή

- $$F = \frac{\frac{SS_B}{k-1}}{\frac{SS_W}{n-k}} = \frac{\frac{17,7}{2}}{\frac{27}{24}} = 7,9$$

Αθροίσματα τετραγώνων	Βαθμοί ελευθερίας	Μέσα τετράγωνα (διασπορές)	F
Μεταξύ των ομάδων $SS_B = 17,7$	$k-1=2$	$\frac{SS_B}{k-1} = 8,85$	$F = \frac{\frac{SS_B}{k-1}}{\frac{SS_W}{n-k}} = 7,9$
Εντός των ομάδων $SS_W = 27$	$n-k=24$	$\frac{SS_W}{n-k} = 1,125$	
Συνολικά $SS_T = 44,7$	$n-1=26$		

Εφαρμογή

- Δηλαδή $F(2,24)=7,9$.
- Το F ακολουθεί την $F_{k-1,n-k} = F_{2,24}$ κατανομή. Συγκρίνουμε το F με το $F_{2,24;0,05} = 3,4$.
- Επειδή το F είναι μεγαλύτερο από το $F_{2,24;0,05} = 3,4$ απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση σε στάθμη σημαντικότητας $\alpha=0,05$. Δηλαδή υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά των μέσων τιμών, οι μέσες τιμές διαφέρουν. Οι ομάδες διαφέρουν.

Εκ των υστέρων συγκρίσεις (Post hoc tests)

- Επιχειρούμε ανά δύο συγκρίσεις των δειγμάτων για να εντοπίσουμε ποια μέση τιμή διαφέρει από ποια. Για το σκοπό αυτό επειδή έχουμε τρία δείγματα γράφουμε τρία σετ υποθέσεων
- $H_0: \mu_1 = \mu_2$
- $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$
- $H_0: \mu_1 = \mu_3$
- $H_1: \mu_1 \neq \mu_3$
- $H_0: \mu_2 = \mu_3$
- $H_1: \mu_2 \neq \mu_3$

Εκ των υστέρων συγκρίσεις

- Υπάρχουν πολλοί τρόποι-κριτήρια για να εργαστούμε. Εδώ το κριτήριο που χρησιμοποιούμε είναι το κριτήριο του Fisher της ελάχιστης σημαντικής διαφοράς (γνωστό και ως L.S.D.), αλλά υπάρχουν και πολλά άλλα που τα επιλέγουμε ανάλογα με την εφαρμογή και το επιστημονικό πεδίο στο οποίο τα εφαρμόζουμε.

Εκ των υστέρων συγκρίσεις

- Για κάθε ζευγάρι μέσων τιμών που ελέγχονται, υπολογίζουμε την απόλυτη τιμή της διαφοράς των μέσων όρων των αντίστοιχων δειγμάτων. Έτσι έχουμε
- $|\bar{X}_1 - \bar{X}_2|$
- $|\bar{X}_1 - \bar{X}_3|$
- $|\bar{X}_2 - \bar{X}_3|$
- Χρησιμοποιούμε το μέσο άθροισμα τετραγώνων εντός των ομάδων $\frac{SS_W}{n-k}$. Έχουμε δει ότι αυτό είναι ίσο με 1,125.
- Μετά υπολογίζουμε την κρίσιμη τιμή της κατανομής t του Student με
- $n-k=27-3=24$ βαθμούς ελευθερίας,
- $t_{24;\frac{\alpha}{2}} = t_{24;0,025} = 2,064$.

Εκ των υστέρων συγκρίσεις

- Συγκρίνουμε το κάθε
- $|\bar{X}_1 - \bar{X}_2|$
- $|\bar{X}_1 - \bar{X}_3|$
- $|\bar{X}_2 - \bar{X}_3|$
- με την αντίστοιχη ποσότητα ελάχιστης σημαντικής διαφοράς, που είναι ίση αντίστοιχα με
- $t_{n-k; \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{SS_W}{n-k} \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}$
- όπου $i, j = 1, 2, 3$.

Εκ των υστέρων συγκρίσεις

- Το $|\bar{X}_1 - \bar{X}_2|$ συγκρίνεται με το

$$t_{n-k; \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{SS_W}{n-k} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)} =$$

$$t_{24; 0,025} \sqrt{1,125 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{8} \right)}$$
- Το $|\bar{X}_1 - \bar{X}_3|$ συγκρίνεται με το

$$t_{n-k; \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{SS_W}{n-k} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_3} \right)} = t_{24; 0,025} \sqrt{1,125 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{9} \right)}$$
- Το $|\bar{X}_2 - \bar{X}_3|$ συγκρίνεται με το

$$t_{n-k; \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{SS_W}{n-k} \left(\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} \right)} = t_{24; 0,025} \sqrt{1,125 \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9} \right)}$$

Εκ των υστέρων συγκρίσεις

- Av
- $|\bar{x}_i - \bar{x}_j| > t_{n-k; \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{SS_W}{n-k} \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}$
- για κάποιο i και κάποιο j ($i, j=1, 2, 3$), τότε θα συμπεράνουμε ότι η μέση τιμή μ_i διαφέρει από την μ_j σε στάθμη σημαντικότητα α ($\alpha=0,05=5\%$ στην περίπτωση μας). Ή αλλιώς, υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά ανάμεσα στην ομάδα i και την j σε στάθμη σημαντικότητας α .
- Εφαρμόζοντας λοιπόν τα παραπάνω έχουμε
- $|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| = |6,5 - 8,13| = 1,63$
- το οποίο συγκρίνεται με το
- $t_{24; 0,025} \sqrt{1,125 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{8} \right)} = 2,064 \cdot 1,06 \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{8}} = 2,064 \cdot 1,06 \cdot 0,474342 = 1,04$
- Επειδή $|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| = |6,5 - 8,13| = 1,63$ είναι μεγαλύτερο από το 1,04 απορρίπτουμε την $H_0: \mu_1 = \mu_2$. Άρα διαφέρει η πρώτη μέση τιμή από την δεύτερη ($\alpha=0,05=5\%$).

Εκ των υστέρων συγκρίσεις

- Το $|\bar{x}_1 - \bar{x}_3| = |6,5 - 6,22| = 0,28$ συγκρίνεται με το
- $t_{24;0,025} \sqrt{1,125 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{9} \right)} = 2,064 \cdot 1,06 \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{9}} = 2,064 \cdot 1,06 \cdot 0,459 = 1$
- Επειδή $|\bar{x}_1 - \bar{x}_3| = |6,5 - 6,22| = 0,28$ δεν είναι μεγαλύτερο από το 1 δεν μπορούμε να απορρίψουμε την $H_0: \mu_1 = \mu_3$. Άρα δεν διαφέρει στατιστικά σημαντικά η πρώτη από την τρίτη ομάδα, δεν υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά ανάμεσα στη μέση βαθμολογία του πρώτου από το τρίτο Τμήμα ($\alpha=5\%$).
- Το $|\bar{x}_2 - \bar{x}_3| = |8,13 - 6,22| = 1,91$ συγκρίνεται με το
- $t_{24;0,025} \sqrt{1,125 \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9} \right)} = 2,064 \cdot 1,06 \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{9}} = 2,064 \cdot 1,06 \cdot 0,4859 = 1,06$
- Επειδή το 1,91 είναι μεγαλύτερο από το 1,06 απορρίπτουμε την $H_0: \mu_2 = \mu_3$. Άρα διαφέρει στατιστικά σημαντικά η δεύτερη από την τρίτη ομάδα, υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά ανάμεσα στη μέση βαθμολογία του δεύτερου και του τρίτου Τμήματος (σε σσ $\alpha=5\%$).

Μέγεθος επίδρασης της ανεξάρτητης μεταβλητής (Effect size)

- Το μέγεθος της επίδρασης της ανεξάρτητης (κατηγορικής) μεταβλητής είναι μια ποσότητα που μας δείχνει πόσο η ανεξάρτητη μεταβλητή επιδρά στην εξαρτημένη, δηλαδή πόση από τη διασπορά της εξαρτημένης μεταβλητής είναι αποτέλεσμα ή αποδίδεται στην ανεξάρτητη μεταβλητή. Υπολογίζεται αφού έχουμε πραγματοποιήσει την ανάλυση διασποράς.
- Συμβολίζεται με η^2 (ήτα στο τετράγωνο) και για την ανάλυση διακύμανσης με έναν παράγοντα αν είναι κοντά στο 0,01 θεωρείται μικρή, αν κοντά στο 0,06 μέτρια και αν είναι κοντά ή μεγαλύτερη από 0,14 θεωρείται μεγάλη.

Μέγεθος επίδρασης

- $\eta^2 = \frac{SS_B}{SS_T}$
- Δηλαδή μετρά τι ποσοστό του συνολικού αθροίσματος τετραγώνων αποτελεί το άθροισμα τετραγώνων ανάμεσα στις ομάδες-δείγματα.
- Στα δεδομένα της άσκησής μας
- $\eta^2 = \frac{SS_B}{SS_T} = \frac{17,7}{44,7} = 0,40$
- που θεωρείται μεγάλο και δείχνει ότι το 40% του συνολικού αθροίσματος τετραγώνων οφείλεται στον διαχωρισμό στις τρεις ομάδες. Πρακτικά, όσο πιο μεγάλο είναι το η^2 τόσο οι ομάδες είναι περισσότερο «απομακρυσμένες» (διαχωρισμένες) μεταξύ τους.