

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΤΕΧΝΗΤΗ ΝΟΗΜΟΣΥΝΗ

Τελικές εξετάσεις (επί πτυχίω φοιτητές)
Τετάρτη 24 Ιουνίου 2026, 20:00 - 22:00

ΘΕΜΑ 1^ο

Κωδικοποιείστε και λύστε το πρόβλημα των **6 βασιλισσών** με αυξητική διατύπωση (ξεκινάμε από άδεια σκακιέρα και προσθέτουμε μια-μια τις βασίλισσες) και αναζήτηση πρώτα σε βάθος. Σταματήστε μόλις βρείτε την πρώτη λύση. Μην εφαρμόσετε έλεγχο συνέπειας και διάδοση περιορισμών.

Μπορείτε να επιδείξετε τη διαδικασία επίλυσης είτε κατασκευάζοντας το δένδρο αναζήτησης του αλγορίθμου πρώτα σε βάθος, είτε με πίνακα. Πόσα βήματα χρειάστηκε ο αλγόριθμος για να βρει την πρώτη λύση;

Υπόδειξη: Κατά την εφαρμογή του αλγορίθμου πρώτα σε βάθος τοποθετείστε τις βασίλισσες με **προτεραιότητα** από την στήλη 1 προς την στήλη 6 και, για κάθε βασίλισσα, από τη γραμμή 1 προς τη γραμμή 6.

Υπόδειξη 2: Κατά την εφαρμογή του αλγορίθμου πρώτα σε βάθος χωρίς έλεγχο συνέπειας και διάδοση περιορισμών, κάθε βασίλισσα τοποθετείται σε ελεύθερη θέση της στήλης της, όπου δεν προκύπτει απειλή με τις βασίλισσες των προηγούμενων στηλών. Εάν δεν υπάρχει τέτοια θέση, γίνεται υπαναχώρηση (backtracking) στην πλησιέστερη προηγούμενη βασίλισσα που είχε εναλλακτικές επιλογές, αυτή μετακινείται στην αμέσως επόμενη εναλλακτική της επιλογή και συνεχίζει η διαδικασία με τις επόμενες βασίλισσες.

Ενδεικτικές απαντήσεις

Θα δείξουμε πρώτα τη διαδικασία με πίνακα (στη συνέχεια και με δένδρο). Οι βασίλισσες θα τοποθετούνται μία-μία, από την αριστερή στήλη (1^η) προς τη δεξιά στήλη (6^η), μια σε κάθε στήλη. Κάθε βασίλισσα που τοποθετείται θα πρέπει να μην συγκρούεται με τις προηγούμενες βασίλισσες. Θα περιγράψουμε μια κατάσταση πάνω στη σκακιέρα με ένα διάνυσμα έξι αριθμών, όπου κάθε αριθμός αντιστοιχεί σε μια στήλη, με τη σειρά που εμφανίζονται οι αριθμοί από αριστερά προς τα δεξιά αντίστοιχα, με την τιμή του να δηλώνει σε ποια γραμμή αυτής της στήλης έχει τοποθετηθεί η αντίστοιχη βασίλισσα (αριθμούμε τις γραμμές από 1 έως 6, από πάνω προς τα κάτω). Ο αριθμός 0 σημαίνει ότι δεν έχει ακόμη τοποθετηθεί βασίλισσα στην αντίστοιχη στήλη. Με δεδομένο ότι οι βασίλισσες τοποθετούνται (από τον αλγόριθμο πρώτα σε βάθος) από αριστερά προς τα δεξιά, θα υπάρχουν μηδενικά στις δεξιές θέσεις του διανύσματος, για όσες βασίλισσες δεν έχουν τοποθετηθεί ακόμη.

Για παράδειγμα, το διάνυσμα [1, 3, 5, 0, 0, 0] αντιστοιχεί στην παρακάτω κατάσταση στην σκακιέρα:

Αρχική κατάσταση είναι η άδεια σκακιέρα, που αντιστοιχεί στο διάνυσμα $[0,0,0,0,0]$. Ακολουθεί η περιγραφή της διαδικασίας με πίνακα.

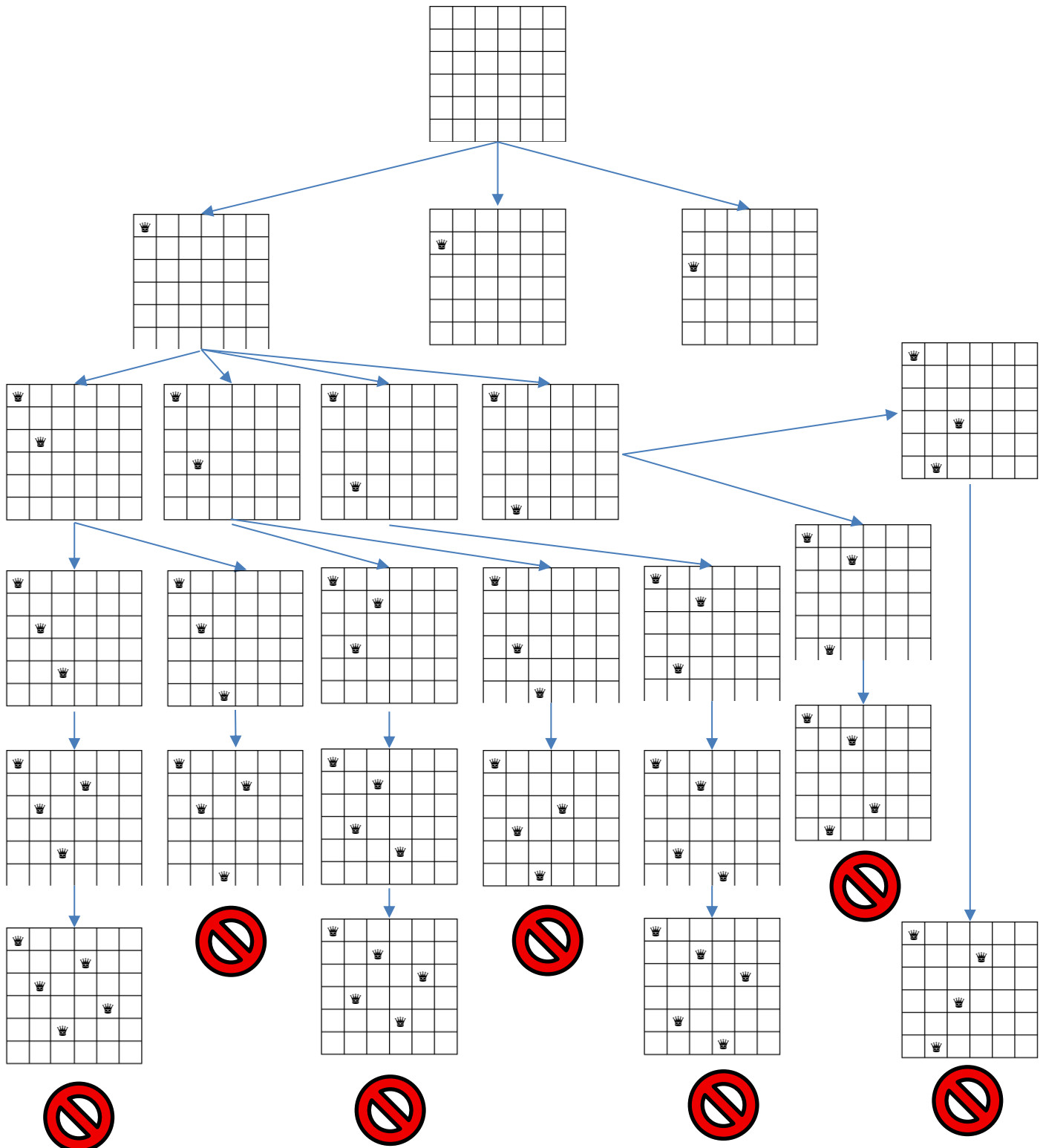
	Μέτωπο αναζήτησης	Τρέχουσα κατάσταση	Διάδοχες καταστάσεις («Παιδιά»)
1	$[0,0,0,0,0]$	$[0,0,0,0,0]$	$[1,0,0,0,0]$, $[2,0,0,0,0]$, $[3,0,0,0,0]$, (*)
2	$[1,0,0,0,0]$, $[2,0,0,0,0]$, $[3,0,0,0,0]$, (*)	$[1,0,0,0,0]$	$[1,3,0,0,0]$, $[1,4,0,0,0]$, $[1,5,0,0,0]$, $[1,6,0,0,0]$
3	$[1,3,0,0,0]$, $[1,4,0,0,0]$, $[1,5,0,0,0]$, $[1,6,0,0,0]$, $[2,0,0,0,0]$, $[3,0,0,0,0]$	$[1,3,0,0,0]$	$[1,3,5,0,0]$, $[1,3,6,0,0]$
4	$[1,3,5,0,0]$, $[1,3,6,0,0]$, $[1,4,0,0,0]$, $[1,5,0,0,0]$, $[1,6,0,0,0]$, $[2,0,0,0,0]$, $[3,0,0,0,0]$	$[1,3,5,0,0]$	$[1,3,5,2,0]$
5	$[1,3,5,2,0]$, $[1,3,6,0,0]$, $[1,4,0,0,0]$, $[1,5,0,0,0]$, $[1,6,0,0,0]$, $[2,0,0,0,0]$, $[3,0,0,0,0]$	$[1,3,5,2,0]$	$[1,3,5,2,4]$
6	$[1,3,5,2,4]$, $[1,3,6,0,0]$, $[1,4,0,0,0]$, $[1,5,0,0,0]$, $[1,6,0,0,0]$, $[2,0,0,0,0]$, $[3,0,0,0,0]$	$[1,3,5,2,4]$	-
7	$[1,3,6,0,0]$, $[1,4,0,0,0]$, $[1,5,0,0,0]$, $[1,6,0,0,0]$, $[2,0,0,0,0]$, $[3,0,0,0,0]$	$[1,3,6,0,0]$	$[1,3,6,2,0]$
8	$[1,3,6,2,0]$, $[1,4,0,0,0]$, $[1,5,0,0,0]$, $[1,6,0,0,0]$, $[2,0,0,0,0]$, $[3,0,0,0,0]$	$[1,3,6,2,0]$	-
9	$[1,4,0,0,0]$, $[1,5,0,0,0]$, $[1,6,0,0,0]$, $[2,0,0,0,0]$, $[3,0,0,0,0]$	$[1,4,0,0,0]$	$[1,4,2,0,0]$, $[1,4,6,0,0]$
10	$[1,4,2,0,0]$, $[1,4,6,0,0]$, $[1,5,0,0,0]$, $[1,6,0,0,0]$, $[2,0,0,0,0]$, $[3,0,0,0,0]$	$[1,4,2,0,0]$	$[1,4,2,5,0]$
11	$[1,4,2,5,0]$, $[1,4,6,0,0]$, $[1,5,0,0,0]$, $[1,6,0,0,0]$, $[2,0,0,0,0]$, $[3,0,0,0,0]$	$[1,4,2,5,0]$	$[1,4,2,5,3]$
12	$[1,4,2,5,3]$, $[1,4,6,0,0]$, $[1,5,0,0,0]$, $[1,6,0,0,0]$, $[2,0,0,0,0]$, $[3,0,0,0,0]$	$[1,4,2,5,3]$	-
13	$[1,4,6,0,0]$, $[1,5,0,0,0]$, $[1,6,0,0,0]$, $[2,0,0,0,0]$, $[3,0,0,0,0]$	$[1,4,6,0,0]$	$[1,4,6,3,0]$
14	$[1,4,6,3,0]$, $[1,5,0,0,0]$, $[1,6,0,0,0]$, $[2,0,0,0,0]$, $[3,0,0,0,0]$	$[1,4,6,3,0]$	-
15	$[1,5,0,0,0]$, $[1,6,0,0,0]$, $[2,0,0,0,0]$, $[3,0,0,0,0]$	$[1,5,0,0,0]$	$[1,5,2,0,0]$
16	$[1,5,2,0,0]$, $[1,6,0,0,0]$, $[2,0,0,0,0]$, $[3,0,0,0,0]$	$[1,5,2,0,0]$	$[1,5,2,6,0]$
17	$[1,5,2,6,0]$, $[1,6,0,0,0]$, $[2,0,0,0,0]$, $[3,0,0,0,0]$	$[1,5,2,6,0]$	$[1,5,2,6,3]$
18	$[1,5,2,6,3]$, $[1,6,0,0,0]$, $[2,0,0,0,0]$, $[3,0,0,0,0]$	$[1,5,2,6,3]$	-
19	$[1,6,0,0,0]$, $[2,0,0,0,0]$, $[3,0,0,0,0]$	$[1,6,0,0,0]$	$[1,6,2,0,0]$, $[1,6,4,0,0]$
20	$[1,6,2,0,0]$, $[1,6,4,0,0]$, $[2,0,0,0,0]$, $[3,0,0,0,0]$	$[1,6,2,0,0]$	$[1,6,2,5,0]$
21	$[1,6,2,5,0]$, $[1,6,4,0,0]$, $[2,0,0,0,0]$, $[3,0,0,0,0]$	$[1,6,2,5,0]$	-
22	$[1,6,4,0,0]$, $[2,0,0,0,0]$, $[3,0,0,0,0]$	$[1,6,4,0,0]$	$[1,6,4,2,0]$
23	$[1,6,4,2,0]$, $[2,0,0,0,0]$, $[3,0,0,0,0]$	$[1,6,4,2,0]$	-
24	$[2,0,0,0,0]$, $[3,0,0,0,0]$	$[2,0,0,0,0]$	$[2,4,0,0,0]$, $[2,5,0,0,0]$, $[2,6,0,0,0]$
25	$[2,4,0,0,0]$, $[2,5,0,0,0]$, $[2,6,0,0,0]$, $[3,0,0,0,0]$	$[2,4,0,0,0]$	$[2,4,1,0,0]$, $[2,4,6,0,0]$
26	$[2,4,1,0,0]$, $[2,4,6,0,0]$, $[2,5,0,0,0]$, $[2,6,0,0,0]$, $[3,0,0,0,0]$	$[2,4,1,0,0]$	$[2,4,1,3,0]$
27	$[2,4,1,3,0]$, $[2,4,6,0,0]$, $[2,5,0,0,0]$, $[2,6,0,0,0]$, $[3,0,0,0,0]$	$[2,4,1,3,0]$	$[2,4,1,3,5]$
28	$[2,4,1,3,5]$, $[2,4,6,0,0]$, $[2,5,0,0,0]$, $[2,6,0,0,0]$, $[3,0,0,0,0]$	$[2,4,1,3,5]$	-
29	$[2,4,6,0,0]$, $[2,5,0,0,0]$, $[2,6,0,0,0]$, $[3,0,0,0,0]$	$[2,4,6,0,0]$	$[2,4,6,1,0]$, $[2,4,6,3,0]$
30	$[2,4,6,1,0]$, $[2,4,6,3,0]$, $[2,5,0,0,0]$, $[2,6,0,0,0]$, $[3,0,0,0,0]$	$[2,4,6,1,0]$	$[2,4,6,1,3]$, $[2,4,6,1,5]$
31	$[2,4,6,1,3]$, $[2,4,6,1,5]$, $[2,4,6,3,0]$, $[2,5,0,0,0]$, $[2,6,0,0,0]$, $[3,0,0,0,0]$	$[2,4,6,1,3]$	$[2,4,6,1,3,5]$ Λύση!!!!

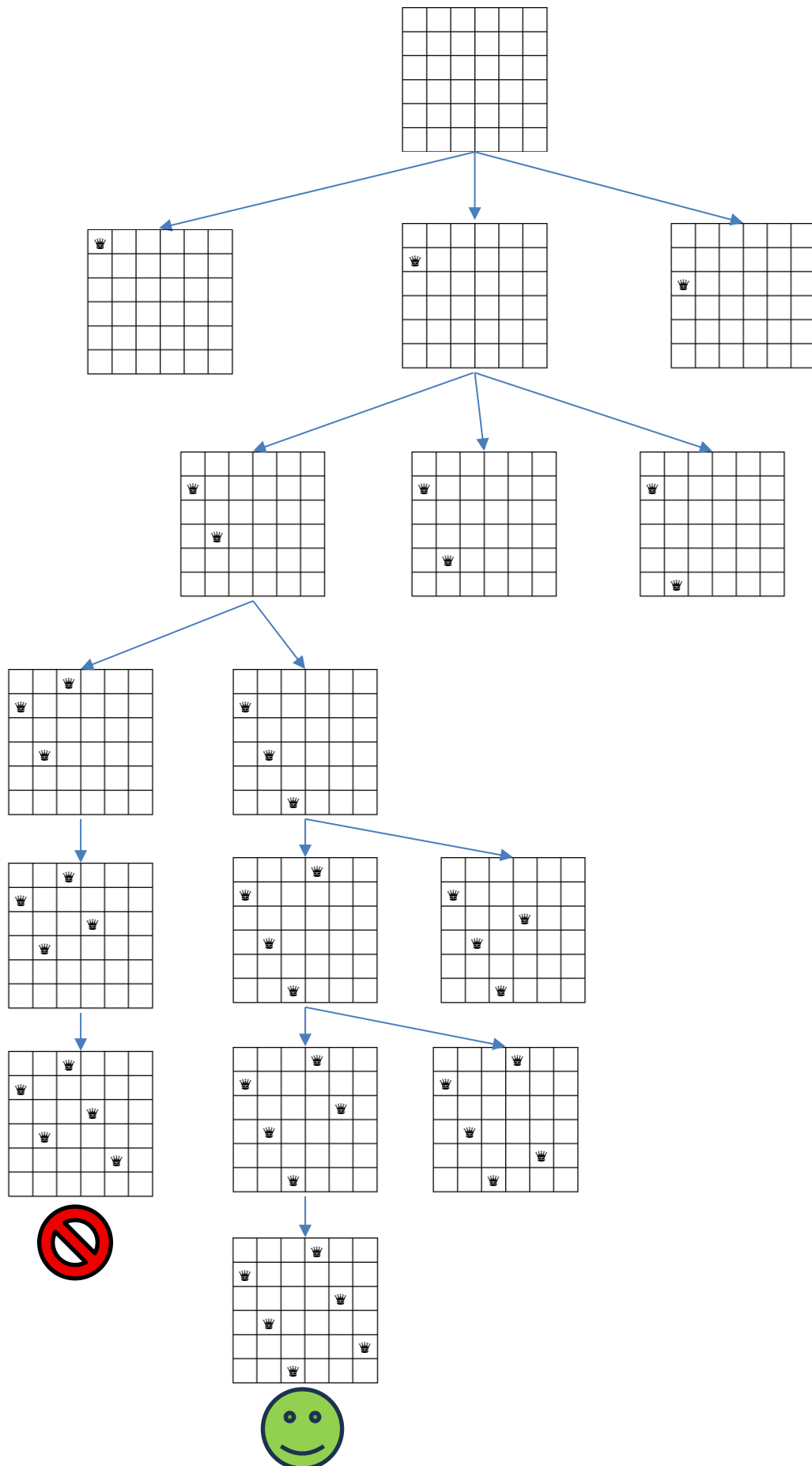
Χρειάστηκαν 31 βήματα για να βρεθεί η πρώτη λύση. Το δένδρο έχει $32+5$ κόμβους. Οι 32 αφορούν τους 31 κόμβους της στήλης «τρέχουσα κατάσταση» (είτε είχαν «παιδιά», είτε όχι) συν τη λύση στην 31^η γραμμή, ενώ οι 5 αφορούν τους κόμβους του μετώπου αναζήτησης της 31^{ης} γραμμής, πλην του πρώτου κόμβου του μετώπου, ο οποίος έγινε τρέχουσα κατάσταση. Ουσιαστικά αυτοί οι 5 κόμβοι είναι φύλλα του δένδρου που δεν έχουν επιλεγεί ακόμη ως τρέχουσα κατάσταση για έλεγχο και ενδεχόμενη επέκταση. Αναλόγως του τρόπου υλοποίησης του αλγορίθμου, δηλαδή με ξεχωριστά υλοποιημένο μέτωπο αναζήτησης ή με εκμετάλλευση των αναδρομικών κλήσεων μιας γλώσσας προγραμματισμού, οι 5 αυτοί κόμβοι ενδέχεται να

έχουν ήδη δημιουργηθεί ή όχι αντίστοιχα (στην τελευταία περίπτωση όλοι οι κόμβοι δημιουργούνται μόλις τη στιγμή που γίνονται τρέχουσα κατάσταση).

(*) Σημειώνεται ότι στο 1^ο βήμα, από τα 6 παιδιά της αρχικής κατάστασης δημιουργήθηκαν μόνο τα 3. Τα υπόλοιπα 3 είναι συμμετρικά το καθένα ως προς κάποιο από τα τρία παιδιά της αρχικής κατάστασης που φαίνονται στον πίνακα και για λόγους συντομίας αγνοήθηκαν. Αν τα λαμβάναμε υπόψη, σε όλες τις γραμμές, στη στήλη «μέτωπο αναζήτησης» θα υπήρχαν συνεχώς στο τέλος και οι καταστάσεις $[4,0,0,0,0,0]$, $[5,0,0,0,0,0]$, $[6,0,0,0,0,0]$.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται η διαδικασία και σε μορφή δένδρου, σε δύο εικόνες, για το πρώτο $[1,0,0,0,0,0]$ και για το δεύτερο $[2,0,0,0,0,0]$ παιδί της ρίζας αντίστοιχα.





Και από το δένδρο αναζήτησης φαίνεται ότι έχουμε 32 κόμβους που έχουν επεκταθεί (περιλαμβανομένων των φύλλων που είναι σημειωμένα με απαγορευτικό σήμα, τα οποία επιχειρήθηκε να επεκταθούν αλλά δεν είχαν διάδοχες καταστάσεις, και του φύλλου που είναι η λύση, οπότε επελέγη να επεκταθεί αλλά δεν επεκτάθηκε αφού προηγήθηκε ο έλεγχος λύσης που ήταν επιτυχής) και 5 κόμβους που είναι φύλλα και δεν έχουν επεκταθεί.

ΘΕΜΑ 2^ο

Λύστε το πρόβλημα του προηγούμενου θέματος με αναζήτηση πρώτα σε βάθος εφαρμόζοντας έλεγχο συνέπειας και διάδοση περιορισμών. Πόσα βήματα χρειάστηκε ο αλγόριθμός σας για να βρει την πρώτη λύση; Βρήκε την ίδια ή διαφορετική λύση σε σχέση με την απάντηση του προηγούμενου θέματος;

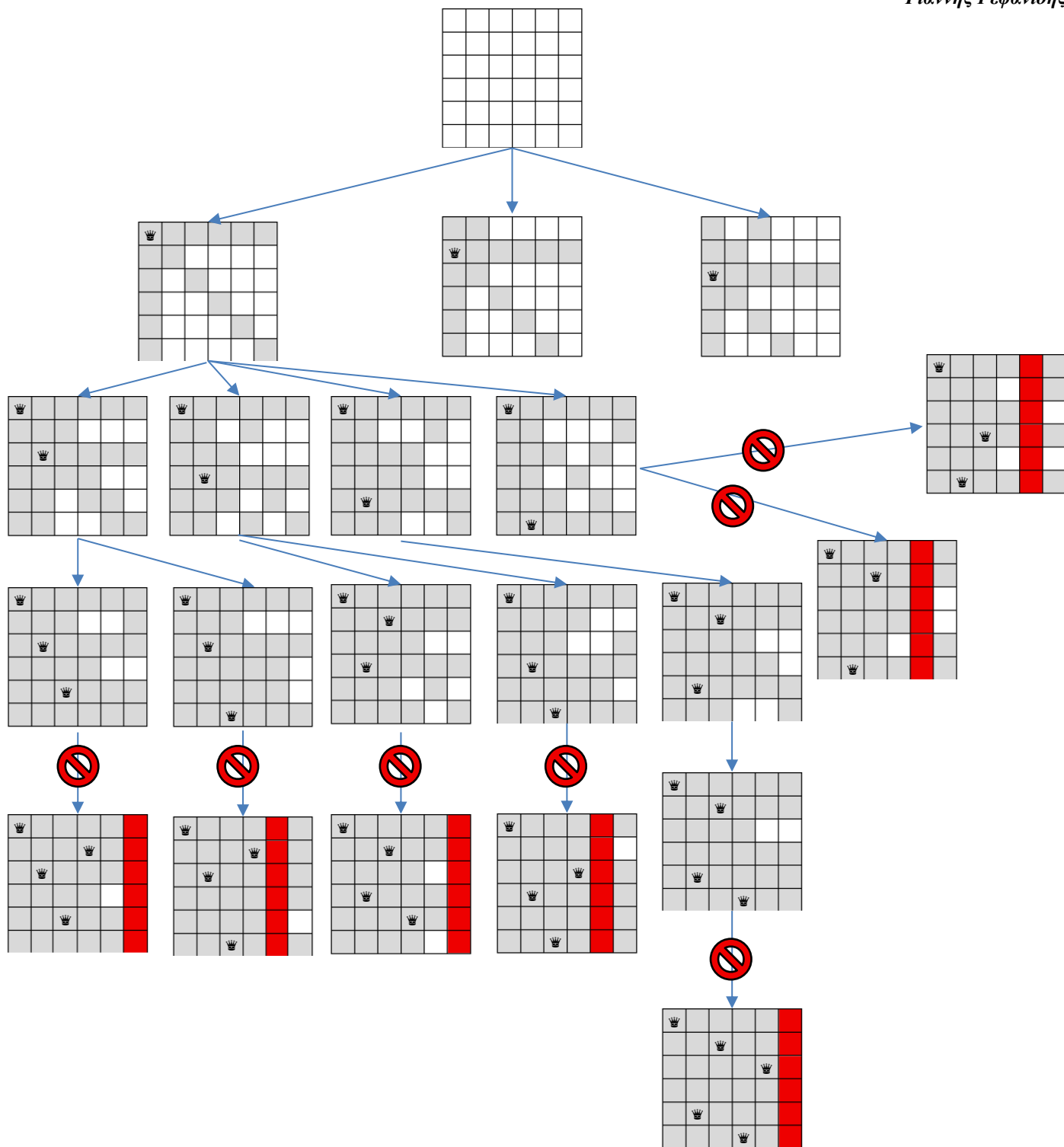
Υπόδειξη: Κατά την εφαρμογή του αλγορίθμου πρώτα σε βάθος με έλεγχο συνέπειας και διάδοση περιορισμών, για κάθε βασίλισσα που τοποθετείται σε ελεύθερη θέση της στήλης της, υπολογίζονται οι επιτρεπτές θέσεις που απομένουν για τις επόμενες βασίλισσες που δεν έχουν τοποθετηθεί ακόμη. Σε περίπτωση που για κάποια επόμενη βασίλισσα δεν έχουν απομείνει θέσεις, η επιλεγείσα θέση της τρέχουσας βασίλισσας δεν είναι επιτρεπτή, οπότε δοκιμάζεται η επόμενη. Εάν δεν υπάρχει επόμενη επιτρεπτή θέση για την τρέχουσα βασίλισσα, αλλάζει θέση η πλησιέστερη προηγούμενη βασίλισσα που έχει εναλλακτικές επιτρεπτές θέσεις και επαναλαμβάνεται η προσπάθεια.

Ενδεικτική λύση

Στο θέμα αυτό θα δείξουμε την ενδεικτική λύση μόνο με δένδρο, ώστε να φαίνεται καλύτερα για ποιο λόγο κάποιες καταστάσεις είναι αδιέξοδα. Για κάθε βασίλισσα που τοποθετείται στη σκακιέρα, σημειώνονται με γκρι χρώμα όλες οι θέσεις της σκακιέρας στις οποίες δεν μπορεί να τοποθετηθεί πλέον βασίλισσα (μας ενδιαφέρουν οι επόμενες στήλες). Αν σε κάποια στήλη που δεν έχει ακόμη τοποθετηθεί βασίλισσα όλες οι θέσεις είναι πλέον απαγορευμένες, αυτή η στήλη φαίνεται με κόκκινο χρώμα και η συγκεκριμένη κατάσταση δεν δημιουργείται ποτέ, δηλαδή δεν θα αποτελέσει μέρος του δένδρου αναζήτησης (και για αυτό σε τέτοιες καταστάσεις τοποθετείται απαγορευτικό σήμα πριν την κατάσταση και όχι μετά). Άρα το δένδρο αναζήτησης αποτελείται μόνο από τις καταστάσεις που έχουν γκρι φόντο και μέχρι τα απαγορευτικά σήματα. Οι καταστάσεις με κόκκινη στήλη δεν έχουν δημιουργηθεί ποτέ και δεν αποτελούν μέρος του δένδρου αναζήτησης, εμφανίζονται στο διάγραμμα μόνο για εποπτικούς λόγους, ιδίως για σύγκριση με το δένδρο του προηγούμενου ερωτήματος.

Υπολογίζουμε τα βήματα που χρειάστηκαν μέχρι να βρεθεί η πρώτη λύση μετρώντας πόσοι κόμβοι έχουν επεκταθεί ή έχουν δοκιμαστεί να επεκταθούν αλλά δεν προέκυψαν διάδοχοι κόμβοι (και όχι με το πόσοι κόμβοι έχουν δημιουργηθεί) ή δεν επεκτάθηκαν γιατί πετυχαίνουν το στόχο (δηλαδή ο κόμβος λύση) και βρίσκουμε ότι πραγματοποιήθηκαν 20 βήματα. Συνολικά δημιουργήθηκαν 20 κόμβοι, συν 3 ακόμη φύλλα που δεν έχουν επιλεγεί ως τρέχουσες καταστάσεις. Για αυτά τα τρία φύλλα ισχύει ότι αναφέρθηκε και στο 1^ο θέμα, ότι δηλαδή αναλόγως του τρόπου υλοποίησης του αλγορίθμου, δηλαδή με ξεχωριστά υλοποιημένο μέτωπο αναζήτησης ή με εκμετάλλευση των αναδρομικών κλήσεων μιας γλώσσας προγραμματισμού, οι 3 αυτοί κόμβοι ενδέχεται να έχουν ήδη δημιουργηθεί ή όχι αντίστοιχα (στην τελευταία περίπτωση όλοι οι κόμβοι δημιουργούνται μόλις τη στιγμή που γίνονται τρέχουσα κατάσταση).

Προφανώς βρίσκεται η ίδια λύση όπως και χωρίς έλεγχο συνέπειας. Ο έλεγχος συνέπειας δεν αλλάζει τη σειρά με την οποία ελέγχονται τα κλαδιά, παρά μόνο κλαδεύει πρόωρα κάποια κλαδιά που είναι βέβαιο ότι δεν θα οδηγήσουν σε λύση.



ΘΕΜΑ 3^ο

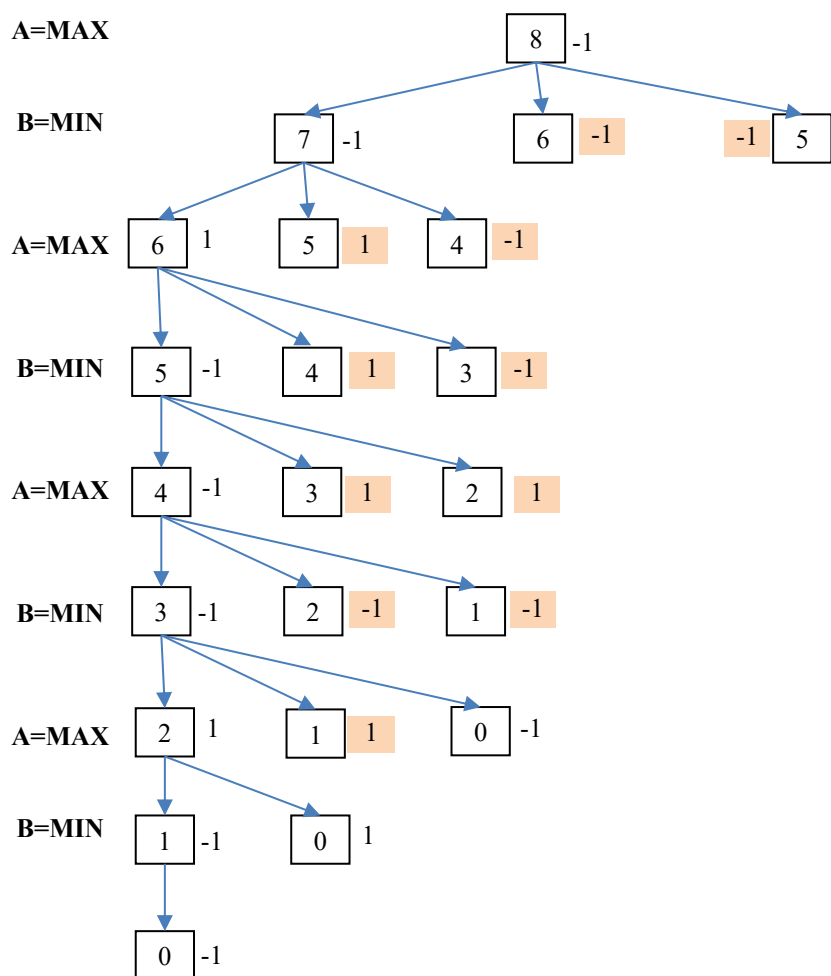
Έχουμε μια στοίβα από 8 τούβλα. Δύο παίκτες, ο A και ο B, παίζουν εναλλάξ, αφαιρώντας ένα, δύο ή τρία τούβλα ο καθένας όταν είναι η σειρά του. Ξεκινά ο παίκτης A. Κερδίζει ο παίκτης που θα αφαιρέσει το τελευταίο τούβλο. Βρείτε ποιος παίκτης θα κερδίσει, αν και οι δύο παίκτες παίζουν ορθολογικά.

Ενδεικτική λύση

Έστω ότι ο A είναι ο παίκτης MAX και ο B είναι ο παίκτης MIN. Θα κατασκευάσουμε το δένδρο του παιχνιδιού μέχρι το τέλος του παιχνιδιού. Θα βαθμολογήσουμε το φύλλα με 1 εφόσον κερδίζει ο A και -1 αν κερδίζει ο B. Στη συνέχεια, με εφαρμογή του αλγορίθμου minimax θα βρούμε ποιος παίκτης κερδίζει.

Για να περιορίσουμε το μέγεθος του δένδρου, θα εφαρμόσουμε μια πρακτική που έχουμε δει σε πολλές προηγούμενες εξεταστικές περιόδους και έχουμε συζητήσει στις διαλέξεις του μαθήματος. Έστω ότι κατασκευάσαμε ολόκληρο ένα υπο-κλαδί του δένδρου, του οποίου η ρίζα έχει N τούβλα ($1 \leq N \leq 8$) και παίζει πρώτος ο παίκτης X ($X = A$ ή $X = B$). Με εφαρμογή του minimax σε αυτό το κλαδί βρήκαμε την τιμή V ($V = 1$ ή $V = -1$) για τη ρίζα του υποκλαδιού. Οπουδήποτε αλλού στο δένδρο του παιχνιδιού συναντήσουμε κόμβο με N τούβλα και παίζει ο παίκτης X , μπορούμε απευθείας να βάλουμε την τιμή V στον κόμβο αυτό, χωρίς να ξανακατασκευάσουμε το υποδένδρο. Αν πάλι συναντήσουμε κόμβο με N τούβλα αλλά δεν παίζει ο παίκτης X (παίζει ο άλλος παίκτης), τότε μπορούμε απευθείας να βάλουμε την τιμή $-V$, χωρίς να ξανακατασκευάσουμε το υποδένδρο.

Ακολουθεί το δένδρο του παιχνιδιού. Όπως βλέπουμε, στη ρίζα ανεβαίνει η τιμή -1, άρα κερδίζει ο παίκτης MIN (ο B).



ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω το πρόβλημα των 4 βασιλισσών. Θεωρείστε 16 προτασιακά σύμβολα, ένα για κάθε θέση της σκακιέρας, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

A1	B1	C1	D1
A2	B2	C2	D2
A3	B3	C3	D3
A4	B4	C4	D4

Για κάθε ένα από τα προτασιακά σύμβολα, η τιμή *αληθές* υποδηλώνει ότι υπάρχει βασίλισσα στην αντίστοιχη θέση, ενώ η τιμή *ψευδές* ότι δεν υπάρχει.

Γράψτε προτάσεις σε προτασιακή λογική, χρησιμοποιώντας τα παραπάνω προτασιακά σύμβολα, για να περιγράψετε τα εξής:

- Σε κάθε γραμμή υπάρχει τουλάχιστον μία βασίλισσα (δώστε παράδειγμα για την πρώτη γραμμή μόνο)
- Αν υπάρχει βασίλισσα σε μια θέση, τότε δεν υπάρχει άλλη βασίλισσα στην ίδια γραμμή, στην ίδια στήλη και στην ίδια διαγώνιο (δώστε παράδειγμα για τη θέση A1)

Μετατρέψτε τις παραπάνω προτάσεις (αν δεν είναι ήδη) σε κανονική συζευκτική μορφή.

Ενδεικτική απάντηση

- Εφόσον σε κάθε γραμμή (στην περίπτωση που εξετάζουμε, στην 1^η γραμμή) υπάρχει τουλάχιστον μία βασίλισσα, άρα τουλάχιστον ένα από τα προτασιακά σύμβολα που αφορούν τη γραμμή θα είναι αληθές. Αυτό εκφράζεται με μια απλή διάζευξη, που στην περίπτωση της πρώτης γραμμής είναι η:

$$A1 \vee B1 \vee C1 \vee D1 \quad (1)$$

- Αν υπάρχει βασίλισσα στο A1, δηλαδή αν το προτασιακό σύμβολο A1 είναι αληθές, τότε δεν μπορεί να υπάρχει βασίλισσα στις θέσεις B1, C1, D1 (ίδια γραμμή), A2, A3, A4 (ίδια στήλη), B2, C3, D4 (ίδια διαγώνιος), άρα αυτά τα προτασιακά σύμβολα είναι όλα ψευδή. Μπορούμε να εκφράσουμε αυτή τη γνώση με απλή συνεπαγωγή, ως εξής:

$$A1 \rightarrow \neg B1 \wedge \neg C1 \wedge \neg D1 \wedge \neg A2 \wedge \neg A3 \wedge \neg A4 \wedge \neg B2 \wedge \neg C3 \wedge \neg D4 \quad (2)$$

ή πιο απλά, με ξεχωριστές συνεπαγωγές:

$$A1 \rightarrow \neg B1 \quad (3)$$

$$A1 \rightarrow \neg C1 \quad (4)$$

$$A1 \rightarrow \neg D1 \quad (5)$$

$$A1 \rightarrow \neg A2 \quad (6)$$

$$A1 \rightarrow \neg A3 \quad (7)$$

$$A1 \rightarrow \neg A4 \quad (8)$$

$$A1 \rightarrow \neg B2 \quad (9)$$

$$A1 \rightarrow \neg C3 \quad (10)$$

$$A1 \rightarrow \neg D4 \quad (11)$$

Για τη μετατροπή σε κανονική συζευκτική μορφή, η (1) βρίσκεται ήδη στη σωστή μορφή. Όλες οι υπόλοιπες προτάσεις έχουν συνεπαγωγή, άρα καταρχάς γίνεται απαλοιφή συνεπαγωγής. Η (2) θα δώσει:

$$\neg A1 \vee \neg (B1 \wedge \neg C1 \wedge \neg D1 \wedge \neg A2 \wedge \neg A3 \wedge \neg A4 \wedge \neg B2 \wedge \neg C3 \wedge \neg D4)$$

που στη συνέχεια με επιμεριστική ιδιότητα δίνει:

$$(\neg A1 \vee \neg B1) \wedge (\neg A1 \vee \neg C1) \wedge (\neg A1 \vee \neg D1) \wedge (\neg A1 \vee \neg A2) \wedge (\neg A1 \vee \neg A3) \wedge (\neg A1 \vee \neg A4) \wedge (\neg A1 \vee \neg B2) \wedge (\neg A1 \vee \neg C3) \wedge (\neg A1 \vee \neg D4)$$

Στην παραπάνω πρόταση οι παρενθέσεις χρειάζονται, γιατί η σύζευξη ως πράξη έχει μεγαλύτερη προτεραιότητα από τη διάζευξη, οπότε χωρίς αυτές η σειρά των πράξεων θα αλλάξει.

Τελικά, επειδή η παραπάνω πρόταση είναι μια μεγάλη σύζευξη (με 9 συζευκτέους) μπορεί να σπάσει σε 9 ξεχωριστές προτάσεις, όλες σε κανονική συζευκτική μορφή, ως εξής (πλέον οι παρενθέσεις δεν χρειάζονται):

$$\neg A1 \vee \neg B1$$

$$\neg A1 \vee \neg C1$$

$$\neg A1 \vee \neg D1$$

$$\neg A1 \vee \neg A2$$

$$\neg A1 \vee \neg A3$$

$$\neg A1 \vee \neg A4$$

$$\neg A1 \vee \neg B2$$

$$\neg A1 \vee \neg C3$$

$$\neg A1 \vee \neg D4$$

Οι παραπάνω προτάσεις είναι αυτές που θα παίρναμε αν είχαμε εφαρμόσει απαλοιφή συνεπαγωγής στις προτάσεις (3) ως (11).

Υπενθυμίζεται ότι η άρνηση έχει μεγαλύτερη προτεραιότητα από τους υπόλοιπους τέσσερις τελεστές της λογικής, για αυτό δεν χρειάζονται παρενθέσεις για την άρνηση.

ΑΠΑΝΤΗΣΤΕ 3 ΑΠΟ ΤΑ ΠΑΡΑΠΑΝΩ 4 ΘΕΜΑΤΑ